ESTUDIOS DEL BACHILLERATO

Matemáticas, (6.° curso)

Libro II y último

Trigonometría

y

Números complejos

por

José Oñate Guiltén

Catedrático de Matemáticas

San Sebastián

1937-38

TRIGONOMETRÍA

por

José Oñate Guillén

Catedrático de Matemáticas

VITORIA
Imp., Lib. y Enc. del Montepío Diocesano
San Antonio, 10

TRIGONOMETRÍA

Tema 1.º

FUNCIONES CIRCULARES

1. Los arcos y los ángulos como magnitudes relativas.

En la Geometría elemental no suelen considerarse los arcos de circunferencia, o los ángulos, más que como magnitudes absolutas; y además, se supone que no pueden exceder de una cierta cantidad, tal como 360°.

Pero podemos suponer intuitivamente que una circunferencia es recorrida por un punto móvil, y que un haz de semirectas es recorrido por una semirecta del haz, la cual gira alrededor de su origen; y entonces, el arco o el ángulo engendrados por estos movimientos, se pueden considerar como *magnitudes relativas,* es decir, que pueden ser *positivas* o *negativas,* según sea el sentido del giro; pudiendo también adquirir un valor tan grande como se quiera, sin más que suponer que el punto o la semirecta que gira, dan una o varias vueltas, y fracciones de vuelta.

Por ejemplo, hay costumbre de tomar como positivo el sentido contrario al del giro de las agujas de un reloj; en este supuesto, escribe con el signo correspondiente la medida en grados sexagesimales del ángulo girado por el minutero y por el horario, desde las doce del mediodía hasta las tres y media de la tarde:

ángulo girado por el minutero: $-1260°$
ángulo girado por el horario: $-105°$.

Para que un arco o un ángulo puedan ser considerados como magnitudes relativas es preciso que se dén el *origen* y el *extremo,* es decir, la primera posición y la última del punto o de la semirecta móvil; y también se tiene que dar el sentido que se considera como positivo.

Y así por ejemplo, construye dos ejes de coordenadas rectangulares, como los X' X e Y' Y de la figura 1.ª, los cuales se cortan en el origen O; suponte que se miden las coordenadas como de ordinario, es decir, las abcisas en el eje de las X, tomando como positivo el sentido de izquierda a derecha; y las ordenadas, en el eje de las Y, tomando como positivo el sentido de abajo arriba; y suponte que el sentido positivo de los ángulos es el contrario al del giro de agujas de un reloj; entonces, escribe la medida en grados sexagesimales del ángulo XOY, que tiene por origen la remirecta OX, y por extremo la OY:

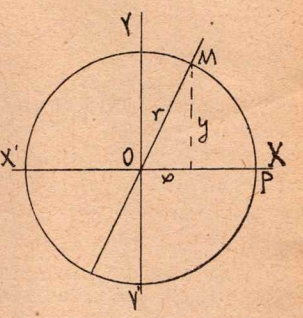

Figura 1.ª

ese ángulo XOY medirá +90°, es decir, 90°.

Traza una circunferencia con centro en el punto O, y de radio 15 mm., y llama P el punto en que corta el semieje OX. Toma en esa circunferencia un arco de origen P, cuyo extremo llamarás M, y que mide +60°. El arco de origen M y de extremo P, tendrá por medida −60°, si es menor que una vuelta.

Hay una infinidad de arcos, unos positivos y otros negativos, que tienen por origen P y por extremo M. Escribe las medidas en grados, de los primeros arcos positivos y de los primeros negativos, que pueden considerarse recorridos por un punto que empieza a moverse en P y acaba en M, ya en un sentido, o ya en el contrario, pudiendo dar una o varias vueltas:

arcos PM positivos: 60°, 420°, 780°, 1140°, ...

arcos PM negativos: −300°, −660°, −1020°, −1380°, ...

En resumen:

Los arcos de circunferencia y los ángulos pueden considerarse como magnitudes relativas, sin más que suponer que son descritos por un movimiento de rotación, que puede realizarse en un sentido o en el contrario, y pudiendo dar el móvil una o varias vueltas y fracción de vuelta.

2. Medidas de amplitudes relativas.

Ya sabes que en todo arco de circunferencia deben distinguirse dos magnitudes distintas, la *longitud* del arco, y su *amplitud*. La longitud del arco se puede apreciar experimentalmente con un hilo o cinta métrica que se arrolla, y después se rectifica; o suponiendo que la circunferencia gira, sin resbalar, sobre una recta, como gira la rueda

de una bicicleta; el camino recorrido por el centro, es la longitud del arco que va aplicándose a la recta.

Rigurosamente se define la longitud del arco como límite de las quebradas inscritas o circunscritas; según habrás estudiado en Geometría.

Como un hilo puede arrollarse dando una o varias vueltas, la longitud de un arco, puede ser tan grande como se quiera.

Cuando no se ha podido estudiar de un modo riguroso el concepto de longitud de un arco, conviene definir su amplitud diciendo que es la que su ángulo en el centro correspondiente; llamando amplitud de un ángulo, la magnitud común a ese ángulo y a todos los que son iguales a él.

Pero habiendo definido rigurosamente la longitud de un arco, como límite de quebradas, conviene definir la *amplitud del arco* diciendo que es *la razón entre la longitud del arco y la longitud de su radio;* escribe la igualdad que lo expresa:

$$\text{amplitud de un arco} = \frac{\text{longitud del arco}}{\text{longitud de su radio}}$$

Como el cociente o razón entre dos magnitudes homogéneas es un número abstracto, resultará que la amplitud es homogénea con los números abstractos.

Por eso, aunque las amplitudes se pueden medir en grados sexagesimales o centesimales, como ya sabes, la medida natural consistirá en medir la longitud del arco y la de su radio, en la misma unidad, por ejemplo en cm., y dividir los números que resultan.

La unidad natural de amplitudes será la de un arco cuya longitud es igual a la longitud de su radio, y esa amplitud se llama *radiante.*

Recordando que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$ halla en unidades naturales, o sea en radiantes, la amplitud de una circunferencia:

$$360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Definida la amplitud de un arco, puede definirse la amplitud de un ángulo observando que todos los arcos correspondientes a un mismo ángulo tienen sus longitudes proporcionales a sus radios, como se demuestra en Geometría.

Por eso, todos los arcos correspondientes a un mismo ángulo tienen igual amplitud, ésta se dice que es también la amplitud del ángulo; es decir, que *llamaremos amplitud de un ángulo la amplitud de uno cualquiera de sus arcos correspondientes.*

Por ejemplo, escribe, primero en grados, y luego en unidades na-

turales o sea en radiantes, las amplitudes de los ángulos que se indican en los primeros miembros siguientes:

$$\text{Un giro} = 360^\circ = 2\pi \qquad \text{Un llano} = 180^\circ = \pi \qquad \text{Un recto} = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Un sexto de giro} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}.$$

El paso de grados a radiantes, o de radiantes a grados, podrás hacerlo en general, por una regla de tres; halla, por ejemplo, los grados que tiene un radiante:

$$\left.\begin{array}{l} 180^\circ \ \ldots\ \pi \\ x^\circ \ \ldots\ 1 \end{array}\right\} \longrightarrow x^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ\ 17'\ 45''.$$

Como ves, el arco de un radiante es un poco menor que el arco de 60°, lo cual se ve desde luego, puesto que el arco de 60° tiene su *cuerda* igual al radio, por lo que la longitud de ese arco será un poco mayor que un radio, es decir, algo mayor que la longitud del arco de un radiante.

En resumen:

La *amplitud de un arco* de circunferencia se puede definir como *la relación entre la longitud del arco y la longitud de su radio;* y la *amplitud de un ángulo* se puede definir como *la amplitud de uno cualquiera de sus arcos correspondientes.*

Esas amplitudes se pueden medir en grados sexagesimales o centesimales, pero la unidad natural es el *radiante,* que es la amplitud de un arco que tiene igual longitud que su radio. El radiante se representará por el número 1.

La amplitud de la circunferencia o de un giro será:

$$360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

3. Las funciones circulares.

Suponte nuevamente en la figura 1.ª un arco de origen P y extremo M. Traza por M la perpendicular al eje de abcisas. Ya sabes que el segmento que tiene por origen O, y por extremo el pie de esa perpendicular, es decir, el segmento x de la figura, tiene por medida la *abcisa* de M; y que el segmento y, cuyo origen es el pie de la perpendicular, y cuyo extremo es M, tiene por medida la ordenada de M.

La abcisa y ordenada de M serán números que dependen de la unidad de medida; por ejemplo, toma el mm. como unidad de medida y

mide el segmento *x;* verás que te resulta: x=7,5 mm. Mide el segmento, *y,* que te resultará: y=13 mm., aproximadamente.

Entonces, con esa unidad de longitud, la abcisa de M será el número abstracto 7,5, y la ordenada será el número 13, aproximadamente.

Si tomas por unidad de longitud el radio *r,* que vale 15 mm., la ordenada y la abcisa de M, serán otros números, a saber los que resultan de medir los segmentos *y, x,* con esta unidad *r,* números que ya sabes que se calculan dividiendo por *r* esos segmentos *y, x;* hazlo:

$$\text{ordenada de M}=\frac{y}{r}=\frac{13\text{ mm.}}{15\text{ mm.}}=\frac{13}{15}=0{,}86\ldots$$

$$\text{abcisa de M}=\frac{x}{r}=\frac{7{,}5\text{ mm.}}{15\text{ mm.}}=\frac{7{,}5}{15}=0{,}5$$

Pues bien, esta ordenada y esta abcisa se llaman *seno* y *coseno* del arco PM; exprésalo:

$$\text{sen PM}=\frac{y}{r}=0{,}86\ldots \qquad \cos \text{PM}=\frac{x}{r}=0{,}5$$

La razón entre el seno y el coseno, o sea entre la ordenada y la abcisa, se llama tangente del arco; hállala:

$$\text{tg PM}=\frac{\text{sen PM}}{\cos \text{PM}}=\frac{y}{x}=\frac{13}{7{,}5}=1{,}73\ldots$$

El seno, coseno y tangente de un arco se llaman funciones circulares, o razones trigonométricas; y también se llaman así los números inversos, a saber:

se llama *cotangente,* el inverso de la tangente;

se llama *secante,* el inverso del coseno;

se llama *cosecante,* el inverso del seno.

Como ejemplo, halla la ctg., sec. y cosc. del arco PM, antes considerado:

$$\text{ctg PM}=\frac{1}{\text{tg PM}}=\frac{x}{y}=\frac{7{,}5}{13}=0{,}57\ldots \qquad \sec \text{PM}=\frac{1}{\cos \text{PM}}=\frac{r}{x}=\frac{15}{7{,}5}=2$$

$$\text{cosc PM}=\frac{1}{\text{sen PM}}=\frac{r}{x}=\frac{15}{13}=1{,}15\ldots$$

En general, dado un arco del cual se conocen el origen, el extremo y el signo, positivo o negativo, se pueden hallar sus razones trigonométricas, trazando dos ejes de coordenadas rectangulares, tales que el eje de abcisas pase por el centro, y después por el origen del arco; y el eje de ordenadas pase también por el centro, y forme con el de abcisas un ángulo recto positivo. Entonces, tomando por unidad de longitud el radio, resultará que el seno del arco es la ordenada de su extremo; el coseno del arco es la abcisa de su extremo; la tangente es la ordenada dividida por la abcisa, y la cotangente es la abcisa partida por la ordenada. La secante y la cosecante carecen de interés.

Para calcular efectivamente estas razones trigonométricas con la

regla de medir, se trazará por el extremo del arco la perpendicular al eje de abcisas, perpendicular que forma en general con ese eje y con el radio que va al extremo del arco, un triángulo rectángulo; se miden sus tres lados con la misma unidad, por ejemplo en mm. y por divisiones se deducen los valores de las razones trigonométricas.

En el caso particular de que el arco PM sea de 60°, no es necesario utilizar la regla de medir para hallar sus razones trigonométricas; pueden determinarse por el cálculo.

En efecto, en la figura antes construída (figura 1.ª), traza la cuerda MP, y el triángulo MPO es, en ese caso, equilátero, porque la cuerda del exágono es igual radio, como ya sabes; así que la altura que parte de M, divide al lado OP en dos partes iguales, por lo cual el segmento x será igual a la mitad del radio OP=r, y el segmento y puedes calcularlo por el teorema de Pitágoras; házlo:

$$y=\sqrt{r^2-\left(\frac{r}{2}\right)^2}=\sqrt{r^2-\frac{r^2}{4}}=\sqrt{\frac{4r^2-r^2}{4}}=\sqrt{\frac{3r^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}r$$

El seno de 60° será la ordenada de M, cuando se toma r, por unidad de longitud, es decir, será la medida de y con la unidad r, o todavía $\frac{y}{r}$, que vale $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1{,}73...}{2}=0{,}86...$ como había resultado con la regla de medir.

El coseno será la medida de x con la unidad r, o sea $\frac{x}{r}=\frac{1}{2}=0{,}5$. Calcula el valor exacto de la tangente de 60°:

$$\text{tg } 60°=\frac{\text{sen } 60°}{\cos 60°}=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}=\sqrt{3}$$

En resumen:

Para hallar las razones trigonométricas de un arco se consideran dos ejes de coordenadas rectangulares que se corten en el centro, y de modo que el semieje de abcisas positivas pase por el origen del arco; se toma por unidad de longitud el radio, y entonces:

se llama seno del arco, la ordenada de un extremo;

se llama coseno del arco, la abcisa de su extremo;

se llama tangente del arco, la razón entre el seno y el coseno, a lo que es igual, entre la ordenada y la abcisa del extremo del arco;

se llama cotangente del arco, el inverso de la tangente, o sea la razón entre la abcisa y la ordenada del extremo del arco;

se llama secante del arco, el inverso del coseno; y se llama cosecante del arco, el inverso del seno.

4. Razones trigonométricas de un ángulo.

Se puede observar que todos los arcos que tienen la misma amplitud, o lo que es igual, todos los arcos correspondientes a un mismo ángulo, tienen las mismas razones trigonométricas.

En efecto, traza un ángulo AOM como el de la figura 2.ª, y en el lado extremo OM, toma varios puntos M, M', M", etc., que pueden ser extremos de otros tantos arcos correspondientes al mismo ángulo AOM, y que por tanto son arcos de igual amplitud.

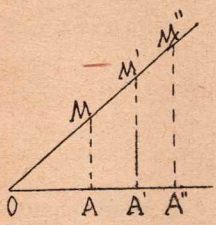

Fig. 2.ª

Traza las perpendiculares MA, M'A', M"A", etc. al lado origen.

Una razón trigonométrica del arco de extremo M, será la razón entre dos lados del triángulo rectángulo AOM; por ejemplo el seno será la razón entre el cateto AM y la hipotenusa OA. Asimismo una razón trigonométrica del arco de extremo M'; será la razón entre dos lados del triángulo rectángulo OA'M'; por ejemplo el seno será la razón entre el cateto A'M' y la hipotenusa OA'; y lo mismo para el tercer arco, y para los demás que se pueden considerar.

Pero siendo semejantes todos esos triángulos, esas razones entre los lados, son iguales en unos triángulos que en los otros, luego todos esos arcos tendrán las mismas razones trigonométricas, que se llaman también razones trigonométricas del ángulo AOM. Escribe, por ejemplo, a quien es igual el seno de este ángulo, considerando los tres triángulos de la figura:

$$\text{sen AOM}=\frac{AM}{OM}=\frac{A'M'}{OM'}=\frac{A''M''}{OM''}=\dots$$

En cursos anteriores habrás estudiado las definiciones de las razones trigonométricas de un ángulo agudo, tal como el AOM, de la figura 2.ª, y ahora comprenderás que aquellas definiciones son un caso particular de las que ahora damos.

Ahora decimos que se llaman razones trigonométricas de un ángulo las razones trigonométricas de uno cualquiera de sus arcos correspondientes.

En particular, si se trata de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, como el AOM de la figura se deduce: *que el seno es igual a la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa;* exprésalo:

$$\text{sen AOM}=\frac{AM}{OM}$$

que el coseno es igual a la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa; exprésalo:

$$\cos AOM = \frac{OA}{OM}$$

que la tangente es igual a la razón entre el cateto opuesto y el adyacente; exprésalo:

$$\text{tg } AOM = \frac{AM}{OA}$$

y que la cotangente es igual a la razón entre el cateto adyacente y el opuesto; exprésalo:

$$\text{ctg } AOM = \frac{OA}{AM}$$

Como ejercicio, calcula los valores numéricos de estas cuatro razones, en la figura construída, utilizando la regla de medir.

Por eso también las funciones circulares, o razones trigonométricas, se llaman *funciones goniométricas,* porque es indiferente considerar ángulos o arcos, ya que solo se atiende a la *amplitud* de unos u otros, que es la misma.

En resumen:

Se llaman razones trigonométricas, o funciones goniométricas de un ángulo, a las razones trigonométricas de uno cualquiera de sus arcos correspondientes.

En particular, si se trata de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, se obtienen las definiciones conocidas.

5. Arcos con el mismo origen y el mismo extremo.

En la definición de las funciones circulares no intervienen más que el centro, el radio, el origen y el extremo del arco. Por eso, *todos los arcos de una misma circunferencia, que tengan el mismo origen y el mismo extremo, tendrán las mismas razones trigonométricas, o funciones circulares.*

Por ejemplo, todos los arcos de la circunferencia dibujada en la figura 1.ª, que tengan por origen P, y por extremo M, tendrán iguales razones trigonométricas.

Suponiendo que la cuerda PM sea igual al radio, el menor arco, positivo, de origen P y extremo M será de 60°; este es el arco recorrido por un punto móvil que parte de P, se mueve en sentido positivo, es decir contrario al de las agujas de un reloj, y termina su movimiento al llegar a M.

Si el punto móvil parte de P, con movimiento de sentido *negativo*, al llegar a M habrá recorrido un arco negativo que valdrá:

$$-300^\circ = -(360^\circ - 60^\circ) = 60^\circ - 360^\circ$$

Tanto en un caso, como en el otro, el punto móvil puede continuar su movimiento, dando una o varias vueltas, de manera que termine siempre en M. Designando por la letra K un número entero cualquiera, que pueda ser positivo, nulo, ó negativo, escribe el valor en grados y en radiantes de todos los arcos de origen P y extremo M:

$$\text{arco } \widehat{PM} = 60^\circ + K.360^\circ = \frac{\pi}{3} + 2\,K\,\pi$$

Pues bien, todos los arcos PM tienen iguales razones trigonométricas. Escribe, por ejemplo que el seno del menor arco PM positivo, es igual al del menor arco PM negativo, e igual al arco general PM, expresándolos en grados y en radiantes:

$$\text{sen } 60^\circ = \text{sen } (-300^\circ) = \text{sen } (60^\circ + K.360^\circ)$$

$$\text{sen}\frac{\pi}{3} = \text{sen}\left(-\frac{5}{3}\pi\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2\,K\,\pi\right)$$

Expresa igualmente que el coseno de una amplitud de α radiantes es igual al coseno de la amplitud obtenida al sumarle a esa uno o varios *ciclos* o vueltas:

$$\cos \alpha = \cos (\alpha + 2\,K\,\pi)$$

En resúmen:

Todos los arcos, o ángulos, que tienen el mismo origen y el mismo extremo, tienen iguales funciones circulares.

Por tanto, si a una amplitud α se le suman o restan uno o varios ciclos, sus razones trigonométricas no varían.

5. Arcos opuestos.

Traza un arco PM de 60°, y otro arco PM' de -60°. Estos dos arcos se llaman opuestos, porque tienen igual amplitud absoluta, pero son de sentido contrario.

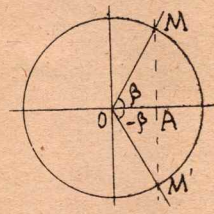

Fig. 3.ª

Teniendo el mismo centro, el mismo radio, y el mismo punto origen, serán los puntos extremos M y M' simétricos respecto del eje de abcisas, por lo cual, trazando por ellos la perpendicular a este eje comprenderás que M y M' tienen la misma abcisa, y que sus ordenadas son iguales en módulo, pero de signo contrario, (figura 3.ª).

Esto nos dice que los senos de esos arcos opuestos son iguales en

módulo, pero de signo contrario; que los cosenos son iguales; que las tangentes, son iguales en módulo, pero de signo contrario, y lo mismo las cotangentes. Llamando β la amplitud de PM será $-\beta$ la amplitud de PM', y podrás expresar por medio de igualdades, esas relaciones; exprésalas:

$$\text{sen}\,(-\beta)=-\text{sen}\,\beta \qquad \cos(-\beta)=\cos\beta$$
$$\text{tg}\,(-\beta)=-\text{tg}\,\beta \qquad \text{ctg}\,(-\beta)=-\text{ctg}\,\beta$$

En resúmen:

Los arcos de igual amplitud absoluta, pero de sentidos contrarios tienen sus senos iguales en módulo, pero de signo contrario; los cosenos iguales; las tangentes, iguales en módulo pero de signos contrarios; y lo mismo las cotangentes.

Pues si se toman dos arcos opuestos de manera que tengan igual centro, igual radio y el mismo punto de origen, los puntos extremos serán simétricos respecto del eje de abcisas, por lo cual sus ordenadas tendrán igual módulo, pero signos contrarios, y sus abcisas serán iguales.

6. Arcos suplementarios.

En geometría elemental se dice que dos ángulos son suplementarios cuando suman un llano, y se llama suplemento de un ángulo lo que le falta para valer un llano, definiciones que se aplican solo a los ángulos que no pasen de un llano.

En Trigonometría, se dice que dos amplitudes cualesquiera son suplementarias, cuando su suma algebráica es igual a la amplitud de un llano; y así, un ángulo de 200° será suplementario del ángulo de −20°; y en general, el suplemento de una amplitud α será la diferencia entre la amplitud de la semicircunferencia y la amplitud dada, por lo cual será $\pi-\alpha$.

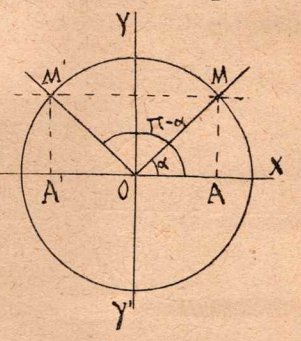

Fig. 4.ª

Para hallar la relación que existe entre las funciones circulares de arcos suplementarios, traza una circunferencia de centro O; (fig. 4.ª), traza dos ejes de coordenadas rectangulares que tengan por origen el punto O; toma un arco de amplitud α cuyo origen esté en el eje de abcisas, y cuyo extremo esté en un punto M. Halla el simétrico M' del punto M, respecto del eje de ordenadas, y observarás entonces

que los dos arcos cuyo origen común está en el eje de abcisas, y cuyos extremos están en M y M', son suplementarios, pues si al que tiene por extremo M' le sumamos un arco igual al que tiene por extremo M, nos da como suma una semicircunferencia. Trazando por M y M' las perpendiculares MA y M'A' al eje de abcisas, observarás que esos puntos tienen iguales las ordenadas, y tienen sus abcisas OA y OA', iguales en módulo, pero de signos contrarios.

Aplicando las definiciones de razones circulares, comprenderás con esto que dos ángulos suplementarios tienen iguales los senos, y que los cosenos, las tangentes y las cotangentes son opuestos; exprésalo:

$$\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha \qquad \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha \qquad \operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

En resúmen:

Si dos arcos tienen amplitudes suplementarias, sus senos son iguales, pero los cosenos, tangentes y cotangentes son opuestos.

Pues si dos arcos de una misma circunferencia son suplementarios y tienen el punto origen en el eje de abcisas, sus extremos serán simétricos respecto del eje de ordenadas, por lo cual éstos extremos tendrán iguales ordenadas, y abcisas opuestas.

7. Arcos complementarios.

En Trigonometría, se dice que dos amplitudes son complementarias, cuando su suma algebráica es igual a la amplitud de un recto. Y así, el complemento de un ángulo de 100° será un ángulo de −10°; y el complemento de una amplitud α será la amplitud

$$\frac{\pi}{2} - \alpha$$

Para ver como son las razones trigonométricas de dos arcos complementarios, dibuja una circunferencia de centro O, y dos ejes de coordenadas rectangulares, que se corten en el centro. Traza un arco AM, cuyo punto origen esté en el eje de abcisas; halla la bisectriz OB, del ángulo recto positivo, formado por los ejes, y halla el punto M', simétrico del M respecto de esa bisectriz (fig. 5.ª).

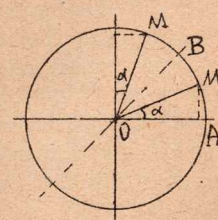

Fig. 5.ª

Comprenderás que los arcos AM y AM' son

complementarios, pues si al arco AM le sumas uno igual al AM', obtienes como suma un cuadrante.

Si los puntos M y M' los unes con el centro, por el punto M trazas la perpendicular al eje de ordenadas, y por el punto M' trazas la perpendicular al eje de abcisas, se te forman dos triángulos iguales, los cuales son simétricos respecto de la bisectriz OB; y de la igualdad de esos triángulos deduces que la ordenada del punto M es igual a la abcisa del punto M', y que la abcisa del punto M es igual a la ordenada del M'.

Por esta razón el coseno de un arco es igual al seno de su complemento, y de ahí el nombre de co-seno; la cotangente de un arco es igual a la tangente de su complemento; y la cosecante de un arco es igual a la secante de su complemento; exprésalo:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\ \alpha \qquad \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\text{ctg}\ \alpha \qquad \text{cose}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sec\ \alpha$$

En resúmen.

Si dos ángulos son complementarios, el seno del uno es igual al coseno del otro; y la tangente del uno es igual a la cotangente del otro.

Pues si dos arcos de una circunferencia tienen su origen en el eje de abcisas, y son complementarios, tendrán los extremos simétricos respecto de la bisectriz del ángulo de los ejes, por lo cual la ordenada de un extremo será igual a la abcisa del otro, y la abcisa del primero será igual a la ordenada del segundo.

EJERCICIOS

1. Dibujar un ángulo obtuso, y hallar sus razones trigonométricas, utilizando la regla de medir.

2. Dibujar un arco de circunferencia de 1,5 cm. de radio, y cuya amplitud sea $\frac{4}{3}$ de π; y hallar sus razones trigonométricas, utilizando la regla de medir.

3. Conocidas las razones trigonométricas de un arco de 60°, calculadas en el Tema anterior, calcular las razones trigonométricas del arco opuesto, del arco suplementario, del arco complementario, y del arco de (60°+360°).

4. Calcular un valor muy aproximado de sen 1", sabiendo que un arco de 1" y la ordenada de su extremo, casi se confunden, y que por tanto el sen. 1" es casi igual al valor en radiantes de la amplitud de 1".

Tema 2.°

VARIACIÓN DE LAS FUNCIONES CIRCULARES

1. Variación del seno.

Si en la expresión *sen x* supones que *x* no es una amplitud constante, sino que es una *variable real,* esa expresión será una *función de x;* puedes llamarla *y;* escribe la ecuación que relaciona la variable independiente *x,* con la variable *y,* función de ella: *y=sen x.* Para estudiar la variación que experimenta la función *y,* al variar *x,* podemos representar gráficamente esa función. A este fin, traza dos ejes de coordenadas rectangulares, que se corten en un punto O, (fig. 6.ª).

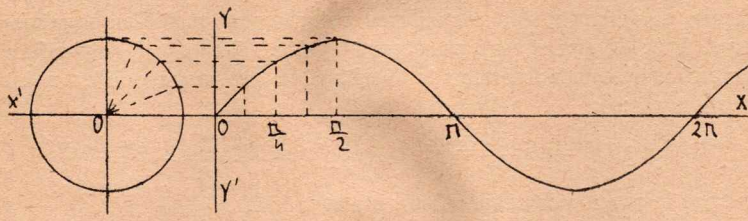

Fig. 6.ª

Traza una circunferencia cuyo radio sea, por ejemplo, de 1 cm., y cuyo centro esté en el eje de abcisas, a la izquierda del origen, y distante de éste más de un cm. Por el centro de la circunferencia, traza una perpendicular al eje de abcisas, y el ángulo recto que forma con él, divídelo en varias partes iguales, por ejemplo, en cuatro.

A la variable *x* te conviene darle por valores principales, las amplitudes correspondientes a un ángulo recto, que es $\frac{\pi}{2}$, y a sus primeros múltiplos y divisores; toma esas amplitudes en el eje de abcisas, con la unidad de longitud de 1 cm.

Las ordenadas de los extremos de cada arco, con la unidad de 1 cm., son los valores de *sen x,* y por tanto, trazando paralelas y perpendiculares a los ejes, como se indica en la figura, puedes ir construyendo puntos de la gráfica.

Observarás que el arco de 0°, o de 0 radiantes, tiene de ordenada 0, por lo cual su seno es cero; escríbelo: sen 0=0. Al ir creciendo el arco, dentro del primer cuadrante, observarás que la ordenada de su extremo, o sea el *seno x,* va creciendo, llegando a un valor máximo,

cuando el arco es de un cuadrante; escribe el valor del seno en este caso:

$$\text{sen } 90^\circ = \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$$

Habiendo dividido el primer cuadrante de la circunferencia en 4 partes iguales, puedes construir 4 puntos de la gráfica correspondiente; constrúyelos, como se indica en la figura, y traza una curva continua que pase por los 4.

Al pasar el extremo del arco variable, al segundo cuadrante, el arco sigue creciendo, pero su seno va disminuyendo, y va tomando los mismos valores que había tomado en el primero, cosa natural, pues sabemos que dos arcos suplementarios tienen el mismo seno; asi que, cuando el arco vale una semicircunferencia, el seno se anula: exprésalo: sen 180° = sen $\pi = 0$.

Después la ordenada, que es el seno, se hace negativo, y va tomando en valor absoluto los mismos valores que tomaba en el primer cuadrante; así que el seno pasa por un valor mínimo, y llega por fin a valer 0 nuevamente; escribe las igualdades que corresponden a los dos valores:

$$\text{sen } 135^\circ = \text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1 \qquad \text{sen } 360^\circ = \text{sen } 2\pi = 0$$

y traza la porción correspondiente de la gráfica.

A partir de 2π, o sea de un *ciclo,* el seno va tomando los mismos valores que a partir de 0, puesto que el extremo del arco va pasando por las mismas posiciones que antes ocupaba y lo mismo ocurre a partir de 2 ciclos, de 3 ciclos, y así sucesivamente.

La curva así construída se llama *senoide* o *sinusoide,* y como ves, se compone de una infinidad de ondas, todas iguales, cada una de las cuales se compone de dos semiondas, que corresponden a ordenadas iguales en módulo, pero de signos contrarios.

En resumen:

Para estudiar la variación de la función *sen x,* puede seguirse un procedimiento gráfico, hallando las ordenadas por medio de una circunferencia cuyo radio sea la unidad de longitud, y buscando los puntos que tienen por abcisas los valores de *x,* y por ordenadas, las de los puntos de esa circunferencia.

La gráfica correspondiente, llamada senoide o sinusoide, se compone de infinitas ondas, todas iguales, estando cada una de ellas dividida en dos semiondas.

2. Variación del coseno.

Para estudiar la variación del coseno, y para dibujar la gráfica correspondiente, es lo más sencillo referirla a la variación del seno, para lo cual puedes observar que el coseno de un ángulo x es igual al seno del ángulo que se obtiene sumando al anterior, un recto; exprésalo:

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

Para demostrar esta identidad basta que observes que el complemento de $\frac{\pi}{2}+x$ es el ángulo $(-x)$, y apliques las propiedades sobre los ángulos complementarios, y los opuestos; aplícalas:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(-x)=\cos x$$

También puedes observar geométricamente que la abcisa de un ángulo x, es igual a la ordenada del ángulo $\frac{\pi}{2}+x$

Con esta observación, puedes dibujar la gráfica correspondiente a la función *cos x,* en la misma forma que has construido la senoide, pero empezando a contar las ordenadas desde la del extremo del primer cuadrante, es decir tomando como ordenada del punto de abcisa 0, la ordenada 1; construye tal gráfica, como se indica en la figura 7.ª

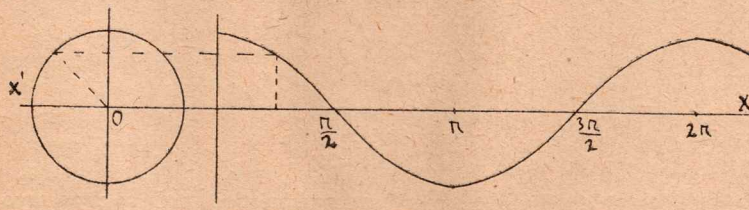

Fig. 7.ª

Como ves, el coseno empieza por valer 1, cuando el ángulo vale 0, pues la abcisa de 0, es 1; luego va disminuyendo, hasta que el ángulo vale π; luego va aumentando, y así sucesivamente.

Escribe los valores que va tomando el coseno, cuando el extremo del arco va cortando a los ejes de coordenadas:

$$\cos 0=1 \qquad \cos\frac{\pi}{2}=0 \qquad \cos\pi=-1 \qquad \cos\frac{3\pi}{2}=0 \qquad \cos 2\pi=1\ldots$$

En resúmen:

La variación del coseno, y la gráfica correspondiente, se estudian fácilmente haciendo referencia a la variación del

seno, observando que la función *cos x* es igual a la función sen $\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ porque se tiene:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(-x)=\cos x$$

3. Variación de la tangente.

Para construir la gráfica de la función *tg x,* es decir, la curva llamada *tangentoide,* traza dos ejes de coordenadas rectangulares, y traza una circunferencia que tenga, por ejemplo, 1 cm. de radio, y su centro a la izquierda del origen de coordenadas, y a una distancia de él mayor que el radio, (fig. 8.ª):

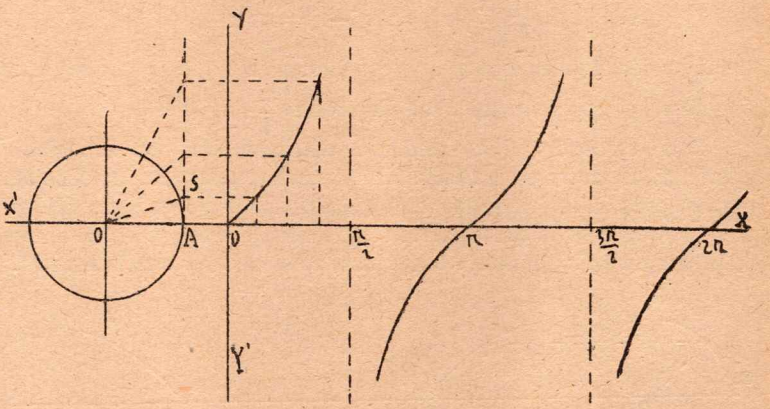

Fig. 8.ª

Divide el ángulo recto positivo, cuyo vértice es O, y cuyo rayo origen es OA, en varias partes iguales, por ejemplo en cuatro.

Para hallar la tangente trigonométrica de un arco cualquiera, sabes que se halla la razón entre la ordenada y la abcisa del extremo del arco.

Pero dado un arco de origen A y centro O, traza la tangente al arco, por su origen, tangente que será perpendicular al radio OA, y traza la recta que pase por el centro O, y por el extremo del arco, recta que cortará en general, a la tangente, en un punto que puedes llamar S.

Observarás enseguida que la razón entre la ordenada y la abcisa del extremo del arco, es igual a la razón $\frac{AS}{OA}$, o sea igual a la medida de AS, con el radio por unidad. Esto justifica el nombre de tangente que se dá a la razón entre la ordenada y la abcisa.

Tomando para cada valor del arco el valor correspondiente de AS, tendrás diversos puntos de la tangentoide.

En particular, cuando el arco es un cuadrante, o un múltiplo impar de un cuadrante, la tangente vale ∞; demuéstralo:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{0} = \infty \qquad \operatorname{tg} \frac{3\pi}{2} = \frac{-1}{0} = \infty \ldots$$

Por eso las paralelas al eje de ordenadas por los puntos de abcisas $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ etc., son asíntotas de las ramas de la tangentoide.

En cambio, los arcos que tienen su extremo en el eje de abcisas tienen su tangente nula; demuéstralo:

$$\operatorname{tg} 0 = \frac{0}{1} = 0 \qquad \operatorname{tg} \pi = \frac{0}{1} = 0 \qquad \operatorname{tg} 2\pi = \frac{0}{1} = 0 \ldots$$

La tangentoide nos indica que la función *tg x* va creciendo en el primer cuadrante, desde 0 hasta ∞; en el segundo cuadrante es negativa, cosa que se vé observando que la ordenada es positiva, pero la abcisa es negativa, por lo cual, su cociente será negativo; y al variar el ángulo, desde un recto hasta un llano, la tangente va aumentando hasta 0, y después sigue creciendo, resultando que los valores que adquiere a partir de π son los mismos que los que adquirió a partir de 0.

Esto se puede ver, no solo gráficamente, sino también observando que el ángulo $\pi + x$ es suplementario del ángulo $-x$; aplica las relaciones correspondientes:

$$\operatorname{tg} (\pi + x) = -\operatorname{tg} (-x) = \operatorname{tg} x$$

Construye varias ramas de tangentoide.

En resumen:

En el primer cuadrante, la función tg x va creciendo de 0 a ∞; en el segundo cuadrante, va creciendo de $-\infty$ a 0; en el tercer cuadrante, va tomando los valores del primero, y así sucesivamente.

Para construir la tangentoide basta tener en cuenta que la tangente trigonométrica de un arco se puede hallar trazando la tangente geométrica que pasa por el origen del arco, y hallando, con el radio por unidad, la ordenada del punto de intersección de esa recta tangente con la prolongación del diámetro que pasa por el extremo del arco.

4. Variación de otras funciones goniométricas.

La variación de las funciones goniométricas: *ctg x, sec x,* y *cosc x* se puede seguir observando la relación con las funciones anteriormente estudiadas; escribe las tres igualdades que las definen:

$$\text{ctg } x=\frac{1}{\text{tg } x} \qquad \sec x=\frac{1}{\cos x} \qquad \text{cosc } x=\frac{1}{\text{sen } x}$$

Tienen, sin embargo, poco interés. Solamente haremos una observación que justifica el nombre de *secante,* y que puede servir para estudiar su variación geométricamente. Y es que si nos fijamos en el triángulo rectángulo ya considerado en la figura 8.ª, que tiene por cateto el radio OA que va al origen del arco, que tiene el otro cateto situado en la tangente al arco por su origen A, y la hipotenusa pasa por el extremo del arco, resulta que la medida de esta hipotenusa OS, con el radio por unidad, es precisamente la secante del arco; pues esa secante tiene que ser igual a la inversa del coseno, y el coseno es igual al cateto OA partido por la hipotenusa; por lo cual la secante será igual a la hipotenusa partido por el cateto OA.

En resumen:

Para estudiar las variaciones de las funciones *ctg x, sec x, cosc x,* se puede aplicar la misma definición de estas funciones circulares.

5. Funciones periódicas.

La función *sen x* se dice que es función periódica, de período 2π, porque al dar a la variable x valores que formen progresión aritmética, de diferencia 2π, los valores que toma la función son todos iguales; exprésalo:

$$\text{sen } x=\text{sen } (x+2\pi)=\text{sen } (x+2.2\pi)=\text{sen } (x+3.2\pi)=\ldots$$

Claro está que siendo x un valor arbitrario, basta que sea: $\text{sen } x=\text{sen } (x+2\pi)$, para deducir que *sen x* es función periódica.

También *cos x* es función periódica, con el mismo período; exprésalo:

$$\cos x=\cos (x+2\pi)$$

La tangente y la cotangente son funciones periódicas, de período π. exprésalo:

$$\text{tg } x=\text{tg } (x+\pi) \qquad \text{ctg } x=\text{ctg } (x+\pi)$$

según hemos visto.

En resúmen:

Se dice que una función de x, que podemos designar: f (x), es función periódica, de período a, cuando al dar a x valores que formen progresión aritmética de diferencia a, la función toma valores iguales; es decir, cuando es:

$$f(x)=f(x+a)$$

El seno y el coseno de una variable x son funciones periódicas de período 2π; la tagente y la cotangente son funciones periódicas de período π.

EJERCICIOS

1. Construyendo un triángulo equilátero, y trazando la altura, se pueden hallar muy fácilmente las razones trigonométricas del ángulo de 60°; hállense, y se verá que resulta:

$$\cos 60°=\frac{1}{2} \qquad \text{sen } 60°=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{tg } 60°=\sqrt{3} \qquad \text{ctg } 60=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

2. Teniendo en cuenta los valores obtenidos en el ejercicio anterior, hállense las razones trigonométricas del ángulo de 30°, complemento del de 60°, y las de 120°, que es el suplemento de 60°.

3. El triángulo rectángulo isósceles tiene dos ángulos de 45°; calculando el valor del cateto en función de la hipotenusa se pueden calcular las razones trigonométricas del arco de 45°; hállense, y se verá que son:

$$\text{sen } 45°=\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{tg } 45°=\text{ctg } 45°=1$$

4. Construir la gráfica que representa la función *ctg* x, observando que es:

$$\text{ctg } x=\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

Tema 3.°

TABLAS TRIGONOMÉTRICAS

1. Tablas naturales.

Las tablas trigonométricas son cuadros numéricos que dan los valores de las razones trigonométricas de los ángulos, y entonces se llaman *tablas trigonométricas naturales,* o dan los logaritmos de esas razones trigonométricas, y entonces se llaman *tablas logarítmico-trigonométricas.*

Para que se comprenda mejor la disposición de las tablas naturales, y aún de las logarítmicas, ponemos a continuación una tabla de las cuatro primeras razones trigonométricas, para ángulos que van de grado en grado, y calculadas con cuatro cifras decimales. Son tablas naturales. Los encabezamientos de la parte superior, que dicen: seno, coseno, tangente y cotangente, corresponden a los ángulos de la izquierda que van desde 0° hasta 45°. Los de la parte inferior: coseno, seno, cotangente y tangente, corresponden a los ángulos de la derecha, que van desde 45° hasta 90°.

El primer valor que figura en esta tabla es el del sen 0° que sabes que es 0; el 2.° es el del seno 1° que es, según la Tabla, 0,0175, aproximado en menos de una diezmilésima.

Este sen 1° es casi igual a la medida del arco de 1° cuando se toma su radio por unidad, pues ese arco casi se confunde con la perpendicular, cuya medida define el seno. Halla esa medida del arco de un grado, recordando que el de 180° mide π:

$$\text{amplitud del arco de } 1° = \frac{\pi}{180} = 0{,}01745...$$

y su valor aproximado en menos de una diezmilésima, será, por exceso: 0,0175. Con esto, y con las fórmulas que estudiarás luego, tendrás alguna idea de como se calcula la Tabla.

Tabla de las razones trigonométricas de 0° a 90°

Ang.	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente		Ang	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente	
0°	0.0000	1,0000	0,0000	∞	90°	23°	0,3907	0 9205	0,4245	2,3559	67°
1	0,0175	0,9998	0,0175	57,2900	89	24	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	66
2	0,0349	0,9994	0,0349	28,6363	88	25	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	65
3	0,0525	0,9986	0,0524	19,0811	87	26	0,4384	0,8988	0,4877	2,0583	64
4	0,0698	0.9976	0.0699	14,3007	86	27	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	63
5	0,0872	0,9962	0,0875	11,4301	85	28	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	62
6	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	84	29	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	61
7	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	83	30	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	60
8	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	82	31	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	59
9	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	81	32	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	58
10	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	80	33	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	57
11	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	79	34	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	56
12	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	78	35	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	55
13	0,2250	0,9744	0 2309	4,3315	77	36	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	54
14	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	76	37	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	53
15	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	75	38	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	52
16	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	74	39	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	51
17	0,2924	0 9563	0,3057	3,2709	73	40	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50
18	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	72	41	0,6561	0,7547	0,8693	1.1504	49
19	0.3256	0.9455	0,3443	2,9042	71	42	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	48
20	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	70	43	0,6820	0.7314	0,9325	1,0724	47
21	0.3584	0,9336	0,3839	2.6051	69	44	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	46
22°	0,3746	0 9272	0 4040	2,4751	68°	45°	0.7071	0,7071	1,0000	1,0000	45°
	Coseno	Seno	Cotangente	Tangente	Ang		Coseno	Seno	Cotangente	Tangente	Ang.

Puede observarse que a cada ángulo de la izquierda, tal como el de 14° corresponde otro en la derecha, 76°, que es complementario. Y esto es porque el seno de un ángulo es igual al coseno de su complemento, y la tangente es igual a la cotangente de su complemento. Halla los siguientes:

sen 14°=cos 76°=0,2419
tg 14°=ctg 76°=0,2493
ctg 50°=0,8391 sen 85°=0,9962

Si el ángulo, del cual se quiere hallar una razón trigonométrica, fuera mayor que 90° y menor que 180° su suplemento sería menor que 90° y las razones de ese suplemento nos darían las del ángulo dado.

Halla el sen 120°: sen 120°=cos 60°=0,5

Si el ángulo fuese mayor que 180° y menor que 360°, se le puede restar de 360°, resultando un ángulo negativo, cuyas razones trigonométricas son iguales que las del dado, y también iguales, u opuestas a las del positivo del mismo valor absoluto. Halla tg 200°:

$$\text{tg } 200° = \text{tg } (200° - 360°) = -\text{tg } 160° = \text{tg } 20° = 0{,}3640$$

Y en fin, si el ángulo pasase de 360° se le quitan todas las veces que se pueda 360°, hasta dejarlo reducido a uno menor de una vuelta.

Halla cos 800°:

$$\cos 800° = \cos (800° - 2.360°) = \cos 80° = 0{,}1736$$

2. Tablas logarítmicas.

En las tablas trigonométricas se pueden resolver, lo mismo que en las tablas de logaritmos de números, los problemas directo e inverso.

He aquí un fragmento de una tabla:

14°

'	Seno	1"	Tangent.	1"	Cotang.	Coseno	1"	'
0	1,383675	8'42....8'17	1,396771	8'95....8'71	0'603229	1,986904	0'53....0'54	60
1	.384182		.397309		.602691	.986873		59
2	384687		397846		602154	986841		58
...	...		...		...	...		...
30	1,398600		1,412658		0'587342	1,985942		30
'	Coseno	1"	Cotang.	1"	Tangent.	Seno	1"	'

75°

Enseguida se hecha de ver que es logarítmico-trigonométrica, es decir, que da los logaritmos de las razones trigonométricas, puesto que a los 14°, el seno y la tangente no podían ser negativos. Va de minuto en minuto.

Problema directo.—Se llama así al problema que consiste en ha-

llar los logaritmos de las razones trigonométricas. Si por ejemplo, se quiere hallar el log sen de 14° 1' buscaremos los 14° en la parte superior, y los minutos en la primera columna de la izquierda; hazlo:

$$\log \text{sen } 14^\circ\ 1' = \bar{1},384182$$

Este mismo es el log cos de su complemento, que en la misma tabla se puede ver que es el ángulo de 75° que hay en la parte inferior, más 59 minutos que hay en la columna de la derecha; exprésalo:

$$\log \cos 75^\circ\ 59' = \bar{1},384182$$

Por tanto, para los ángulos agudos, menores que 45°, se buscarán en el encabezamiento superior los grados, y en la columna de la izquierda los minutos; y los mayores de 45° en el encabezamiento inferior, y en la columna de la derecha.

Pero puede suceder, que en el ángulo nos den *segundos,* y entonces hay que *interpolar.*

Supongamos, por ejemplo, que se quiere hallar el

$$\log \text{sen } 14^\circ\ 1'\ 10''$$

Hallamos el que corresponde a 14° 1' que ya hemos visto era

$$\bar{1},384182$$

Y ahora admitimos la proporcionalidad aproximada entre los incrementos de los logaritmos-senos, y los incrementos de los ángulos, lo cual se puede admitir sin error sensible, mientras el ángulo no baje de 4°, en cuyo caso no se puede interpolar así, con tales tablas.

La columna comprendida entre el seno y tangente, encabezada con el número 1", nos dice que al incrementarse el ángulo en un segundo el logaritmo seno se incrementa en 8'42, luego al incrementarse el ángulo en 10" el logaritmo seno se incrementará en 8'42×10 de acuerdo con la proporción

$$\frac{10''}{1''} = \frac{x}{8'42} \longrightarrow x = 8'42 \times 10 = 84'2$$

Aplícalo: $\log \text{sen } 14^\circ 1' 10'' = \bar{1},384266$

Podíamos también hallar la *diferencia tabular,* o sea la diferencia entre el logaritmo-seno de 14° 1' y el de 14° 2' que es 505 y luego poner esta proporción

$$\frac{60''}{10''} = \frac{505}{x} \longrightarrow x = \frac{505 \times 10}{60} = 84\ldots$$

Si se tratara de logaritmo-coseno o logaritmo cotangente la corrección habría que *restarla,* pues al aumentar el ángulo, ellos disminuyen. Hazlo en estos casos:

$$\log \cos 14^\circ 1' 10'' = \bar{1}'986873 \quad -0'53 \times 10 = \underline{\qquad 5'3}$$

$$= \bar{1},986867$$

$$\log \text{ctg } 75^\circ 58' 20'' = \bar{1},397667$$

Problema inverso.—Tiene por objeto hallar un ángulo cuando se conoce el logaritmo de una de sus razones trigonométricas.

Si se nos da el logaritmo seno se buscará en la primera o en la última columna; por ejemplo halla el ángulo x de la ecuación:

$$\log \operatorname{sen} x = \bar{1},383675 \longrightarrow x = 14^\circ$$

y lo mismo si es logaritmo coseno; y si es logaritmo tangente o cotangente, se buscará en la segunda o tercera columna; ejemplo, halla el ángulo x en la ecuación:

$$\log \operatorname{ctg} x = \bar{1},397309 \longrightarrow x = 75^\circ 59'$$

Pero si el logaritmo que nos dan no está en la tabla, habrá que *interpolar;* y para eso, cuando se trata de senos o tangentes, se busca el más próximo inferior, que nos da los grados y minutos; y los segundos se calculan admitiendo la proporcionalidad dicha entre los incrementos de los ángulos y los incrementos de los logaritmos; y si se trata de cosenos o cotangentes se busca el más próximo superior, ya que disminuyen al crecer los ángulos; y con eso se tendrán los grados y minutos; y los segundos se calcularán interpolando por el procedimiento dicho, siempre que el ángulo no exceda de 86°.

Aplícalo en estos dos ejemplos:

1.° $\log \operatorname{tg} x = \bar{1},397400$

$\ldots 7309 \ldots$ $14^\circ\ 1'$

$9100 \mid 8'95$

$150 \quad 10''$

$$\frac{91}{8,95} = \frac{z''}{1''} \qquad z = \frac{91}{8,95}$$

Luego: $x = 14^\circ\ 1'\ 10''$

2.° $\ldots 4687 \ldots$ $75^\circ\ 58'$

$\log \cos y = \bar{1},384200$

$48700 \mid 8'42$

$6600 \quad 57'' 8$

7060

324

$$\frac{487}{8'42} = \frac{z''}{1''} \qquad z = \frac{487}{8'42}$$

Luego: $y = 75^\circ\ 58'\ 57'' 8$

EJERCICIOS

Compruébense los siguientes resultados:

$\log \operatorname{sen} 26^\circ\ 17'\ 14''2 = \bar{1},646279$

$\log \operatorname{ctg} 76^\circ\ 5'\ 24''4 = \bar{1},393853$

$\log \operatorname{tg} x = 0,277821 \qquad x = 62^\circ\ 11'\ 26'' 6$

$\log \cos y = \bar{1},638294 \ldots \quad y = 64^\circ\ 13'\ 37'' 6$

Tema 4.°

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. Ecuación sen x=m.

Supongamos que nos dan un número *m* y se quiere hallar el arco cuyo seno es *m;* llamando *x* la amplitud de ese arco, escribe la ecuación a que debe satisfacer: sen x=m.

Se puede dejar indicado el valor de *x,* expresando que es igual a la expresión *arc sen m,* que se lee: *arco cuyo seno es m.* Despeja en esa forma la *x:*

$$\text{sen } x=m \longrightarrow x=\text{arc sen } m$$

Para hallar efectivamente los valores de *x* se puede seguir un procedimiento gráfico o un procedimiento numérico.

Para resolver la ecuación por método gráfico, basta recordar la definición de seno de un arco, que es igual a la ordenada del extremo del arco, cuando se toma el radio por unidad.

Y para resolverla por método numérico, basta consultar las tablas naturales, o bien, aplicar logaritmos y consultar las tablas logarítmico-trigonométricas.

Suponte, por ejemplo, que quieres resolver la ecuación: $\text{sen } x=\frac{2}{3}$

Traza para ello una circunferencia de centro O, y cuyo radio mida, por ejemplo, 15 mm. como en la figura 4.ª del Tema 1; traza luego dos ejes de coordenadas rectangulares, cuyo origen esté en el centro; toma en el eje de ordenadas un segmento OP=y, cuya medida, con el radio por unidad sea la ordenada del extremo del arco, para lo cual empieza por calcular este segmento:

$$\frac{y}{r}=\frac{y}{15\text{ mm.}}=\text{sen } x=\frac{2}{3} \longrightarrow y=15\text{ mm.}\times\frac{2}{3}=10\text{ mm.}$$

y tomas con la regla de medir en el eje de ordenadas, dicho punto P, cuya ordenada es 10 mm. Por este punto trazas una paralela al eje de abcisas y los puntos M y M' en que esta paralela corta a la circunferencia, serán extremos de los arcos cuyo seno es $\frac{2}{3}$, siendo el origen común a tales arcos el punto en que la circunferencia corta al semieje OX.

Si llamas *x* la amplitud natural del menor arco positivo de extremo M, será $\pi-x$ la amplitud del menor arco positivo de extremo M', y estos dos arcos, que son suplementarios, tendrán el mismo seno,

que es $\frac{2}{3}$; y también tendrán este seno, los arcos que se obtienen sumando o restando a los anteriores un número cualquiera de circunferencias.

Ves por tanto, que la ecuación: sen $x=\frac{2}{3}$, tiene infinitas soluciones; si a una de ellas la llamamos α, escribe la expresión general de los valores de x:

$$x=\text{arc sen } \frac{2}{3}=\alpha+2\,K\,\pi \quad \text{ó} \quad \pi-\alpha+2\,K\,\pi$$

Lo mismo se puede decir de toda ecuación de la forma: *sen* $x=m$, si bien hay que advertir que si m es mayor que 1 ó menor que -1, la ecuación no puede tener soluciones reales, pues el seno de un ángulo real no puede ser mayor que 1, ni menor que -1.

Si tuviese m un módulo superior a 1, la paralela al eje de abcisas de la figura considerada, sería exterior a la circunferencia, y no podría cortarla en puntos reales. Para resolver numéricamente la misma ecuación: sen $x=\frac{2}{3}=0{,}6666...$, busca en las tablas naturales del Tema 3 el ángulo cuyo seno es 0,6666... y verás que está comprendido entre 41° y 42°; tal ángulo, y su suplemento, serán las dos menores soluciones positivas de la ecuación. Para apreciar minutos y segundos, te conviene acudir a las tablas logarítmico-trigonométricas, y a este fin, empieza por aplicar logaritmos a la ecuación dada:

$$\log \text{sen } x=\log 2-\log 3=\bar{1},823909$$

y ahora busca en la tabla el ángulo x correspondiente a ese logaritmo-seno, y verás que es: $x=41°\ 48'\ 37''$.

Este será el menor ángulo positivo que verifica la ecuación. Halla el otro ángulo positivo, menor de un giro, que también la verifica:

$$180°-x=138°\ 11'\ 23''$$

En resúmen:

Para hallar un arco cuyo seno se conoce, se puede seguir procedimiento gráfico, aplicando la definición de seno, o procedimiento numérico, acudiendo a las tablas.

Hay infinitos ángulos que tienen el mismo seno; sus valores están dados por estas expresiones:

$$\alpha+2\,K\,\pi \quad \text{ó} \quad \pi-\alpha+2\,K\,\pi$$

2. Ecuación cos x=m.

Para esta ecuación se puede hacer un razonamiento análogo al anterior, variando únicamente en que, en el procedimiento gráfico habrá que trazar una paralela al eje de abcisas, como se indica en la figura

3.ª del mismo Tema 1, y se vé que, si *m* no excede a 1 en módulo, la ecuación tiene también infinitas soluciones, de la forma:

$$\beta+2K\pi \quad \text{ó} \quad -\beta+2K\pi$$

Despeja la *x* de la ecuación: *cos x=m,* empleando la expresión *arc cos m,* que se lee: arco cuyo coseno es m:

$$\cos x=m \longrightarrow x=\text{arc cos } m$$

Resuelve, por ejemplo la ecuación $\cos x=\frac{2}{3}$, por método gráfico y por cálculo, y te encontrarás con arcos que son complementarios de los obtenidos en el párrafo anterior, cosa que ya habrás previsto.

En resúmen:

Para hallar un arco cuyo coseno se conoce, se sigue procedimiento análogo al del seno.

Los ángulos que tienen igual coseno son de la forma:

$$\beta+2K\pi \quad \text{ó} \quad -\beta+2K\pi$$

3. Ecuación tg x=m.

Supongamos que se quieren hallar los arcos cuya tangente es $\frac{2}{3}$. Escribe la ecuación a la cual debe satisfacer uno cualquiera de esos arcos *x,* y despeja el valor de *x* dejándolo solamente indicado:

$$\text{tg } x=\frac{2}{3} \longrightarrow x=\text{arc tg } \frac{2}{3}$$

Es decir que *x* es un arco cuya tangente es $\frac{2}{3}$. Para hallar *x* por procedimiento gráfico construye una circunferencia de centro O, y cuyo radio sea, por ejemplo, 12 mm. Traza dos ejes rectangulares que se corten en O, y llama A el punto en que es cortada la circunferencia por el semieje de abcisas positivas.

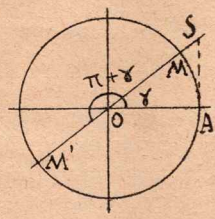

Fig. 9.ª

Traza la tangente a la circunferencia por el punto A, y recuerda que la tg trigonométrica de un ángulo de origen OA, se puede hallar determinando el punto S en que el lado extremo corta a la tangente AS a la circunferencia, con lo cual la relación AS/OA será la tg del ángulo.

Por eso, sabiendo que el radio OA mide 12 mm. y que la tg. del ángulo x vale $\frac{2}{3}$ puedes calcular la longitud de AS; hazlo.

$$\frac{AS}{OA}=\text{tg } x \longrightarrow AS=OA\times\text{tg } x=12 \text{ mm.}\times\frac{2}{3}=8 \text{ mm.}$$

Determina así el punto S, tomando con la regla de medir 8 mm., desde A; y traza luego la recta OS; esta recta corta a la circunferencia en dos puntos M y M', que son extremos de los arcos de origen A, y cuya tg es $\frac{2}{3}$. Si llamas γ el menor ángulo positivo cuya tangente es $\frac{2}{3}$ también la tg del ángulo $(\pi+\gamma)$, cuyo extremo es M', vale $\frac{2}{3}$ demuéstralo fijándote en que este ángulo tiene por suplemento $-\gamma$:

$$\text{tg}\,(\pi+\gamma)=-\text{tg}\,(-\gamma)=\text{tg}\,\gamma$$

Así que, todos los ángulos que tienen la misma tangente están comprendidos en la fórmula general:

$$\gamma+2\,K\,\pi \quad \text{ó} \quad \pi+\gamma+2\,K\,\pi, \text{ es decir } \gamma+K\,\pi$$

Para determinar numéricamente el mismo ángulo cuya tg es $\frac{2}{3}=0{,}6666...$, busca en las tablas naturales del Tema 3 ese ángulo y verás que está comprendido entre 33° y 34°. Para determinarlo con más precisión, aplica logaritmos:

$$\log \text{tg}\, x=\log 2-\log 3=\bar{1},823909$$

y halla los ángulos correspondientes, menores de un giro:

$$x=33°\ 41'\ 24'' \qquad x+180°=213°\ 41'\ 24''$$

Cualquiera que sea *m* la ecuación tg x=m tiene soluciones reales.

En resumen:

Para hallar los arcos cuya tangente es conocida puede seguirse procedimiento gráfico, fundado en la representación geométrica de la tg., y procedimiento numérico, aplicando logaritmos.

Hay infinitos ángulos que tienen una tangente dada, y están comprendidos en la forma general: $\gamma+K\,\pi$.

4. Relación entre el seno y el coseno de un ángulo.

Traza una circunferencia de centro O; traza dos ejes de coordenadas rectangulares, que se corten en O; llama P el punto en que el semieje de abcisas positivas corte a la circunferencia; toma otro punto M, en la circunferencia, y traza el radio OM, y la perpendicular MA, desde M al eje de abcisas.

Tomemos el radio por unidad de longitud; entonces la medida del radio OM, es 1; pon este número al lado del segmento OM. La medida del segmento AM, es el seno del arco PM, y la medida del segmento OA es el coseno del arco PM.

Llamando α la amplitud de ese arco PM, pon al lado del segmento

AM, su medida, o sea: *sen* α; y pon al lado del segmento OA, su medida, o sea: *cos* α.

Aplica el teorema de Pitágoras al triángulo OAM, y sustituye luego, cada lado, por su medida con el radio unidad:

$$\overline{AM}^2 + \overline{OA}^2 = \overline{OM}^2$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Por ejemplo, sabiendo que el coseno de 60° vale 1/2, aplica esta fórmula para hallar sen 60°:

$$\operatorname{sen}^2 60° + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \longrightarrow \operatorname{sen}^2 60° = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \longrightarrow \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

En resumen:

El cuadrado del seno de un arco, mas el cuadrado del coseno, es igual a la unidad.

Pues trazando por el extremo del arco, el radio, y la perpendicular al eje de abcisas, se forma un triángulo rectángulo al cual se le aplica el teorema de Pitágoras, para obtener la relación que se quiere demostrar.

5. Cálculo de las razones trigonométricas, si se conoce una de ellas.

En el tema anterior has calculado el seno de 60°, conocido el coseno.

En general, dada una razón trigonométrica de un arco, se pueden calcular las demás, muy fácilmente.

Y así, suponte que se conoce el seno de un arco α; para calcular el coseno, puedes despejarlo de la relación obtenida en el párrafo anterior; despéjalo:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \longrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}$$

El doble signo $\pm$ tiene una interpretación, y es que al dar el seno de un arco, sin conocer el arco, hay en general dos arcos suplementarios, menores que una circunferencia, que tienen igual seno, pero cosenos opuestos; por ejemplo, si el seno de un arco, α, vale 0, halla el coseno:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - 0^2} = \pm 1$$

El coseno tiene dos valores, +1 y −1, porque en efecto hay dos arcos, el arco 0, y el arco π, cuyo seno es 0, y cuyos cosenos son 1 y −1, respectivamente.

Calcula la *tg* α en función del sen α:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\text{sen } \alpha}{\pm \sqrt{1-\text{sen}^2 \alpha}}$$

Asimismo, halla el *sen* α y la *tg* α en función del *cos* α:

$$\text{sen } \alpha = \pm \sqrt{1-\cos^2 \alpha} \qquad \text{tg } \alpha = \frac{\pm \sqrt{1-\cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$$

Si se conoce tg α, se puede hallar el cos α, partiendo de la identidad que relaciona el seno y el coseno; dividiendo sus dos miembros por cos α, y despejando cos α; hazlo:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \longrightarrow \text{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \longrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1+\text{tg}^2 \alpha}}$$

Y para hallar el seno en función de la tangente, se expresa primero como producto del coseno por la tangente, y se aplica la fórmula acabada de obtener; hazlo:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \longrightarrow \text{sen } \alpha = \cos \alpha . \text{tg } \alpha = \frac{\text{tg } \alpha}{\pm \sqrt{1+\text{tg}^2 \alpha}}$$

Por ejemplo, en el arco de 45°, la ordenada de su extremo es igual que la abcisa; lo cual nos dice que su tg vale 1; halla por las fórmulas anteriores el seno y el coseno de 45°:

$$\text{sen } 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

En este caso solo se toma el signo +, porque los ángulos agudos tienen sus razones trigonométricas positivas.

En resumen:

Las definiciones de las razones trigonométricas y la identidad que relaciona el seno con el coseno, permiten hallar las razones trigonométricas de un arco, cuando se dá una de ellas.

4. Ecuaciones trigonométricas en general.

Las ecuaciones trigonométricas que hemos estudiado en los párrafos 1, 2 y 3 solo contienen una función circular, tal como el *sen x*. Las demás ecuaciones que solo contienen una función circular, se re-

ducen a las anteriores, despejando esa función previamente. Resuelve, por ejemplo, la ecuación que sigue, empezando por despejar el *cos x:*

$$\cos x\,(2.\cos x-3)=-1 \longrightarrow 2\cos^2 x-3\cos x+1=0 \longrightarrow \cos x=$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4.2.1}}{2.2}$$

Haciendo operaciones, puedes calcular los dos valores que puede tener cos x; hállalos y escribe las fórmulas que dan los infinitos valores que puede tener *x,* expresándolos en grados y en radiantes.

$$\cos x=\begin{cases} 1 \longrightarrow x=0^\circ+K.360^\circ=0+2K\pi \\ 1/2 \longrightarrow x=\begin{cases} 60^\circ+K.360^\circ=\frac{\pi}{3}+2K\pi \\ -60^\circ+K.360^\circ=-\frac{\pi}{3}+2K\pi \end{cases} \end{cases}$$

Llama x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5 las 5 soluciones de la ecuación dada, que son menores en módulo que 360°, y escribe sus valores en grados:

$x_1=0^\circ$ $\quad x_2=60^\circ$ $\quad x_3=300^\circ$ $\quad x_4=-60^\circ$ $\quad x_5=-300^\circ$

Si la ecuación trigonométrica, contiene dos o más funciones circulares de un mismo arco, se agregan a esa ecuación las identidades que relacionan las funciones circulares de un mismo arco, y se forma así un sistema de igualdades, que se procura resolver considerando previamente como incógnitas a las funciones circulares.

Por ejemplo, para resolver la ecuación: sen x=tg x, le agregamos la identidad que relaciona, el sen x, el cos x y la tg x, formándose un sistema de dos igualdades, en el cual se pueden considerar como incógnitas las funciones circulares; escribe el sistema y elimina tg x:

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen } x=\text{tg } x \\ \text{tg } x=\dfrac{\text{sen } x}{\cos x}\end{array}\right\} \longrightarrow \text{sen } x=\frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

En esta ecuación, quita denominadores, efectúa transposición de términos, y reduce términos semejantes:

$\text{sen } x.\cos x=\text{sen } x \longrightarrow \text{sen } x.\cos x-\text{sen } x=0 \longrightarrow \text{sen } x.(\cos x-1)=0$

Esta última ecuación equivale al conjunto de otras dos; escríbelas y resuélvelas:

$$\text{sen } x=0 \longrightarrow x=\begin{cases} 0^\circ+K.360^\circ \\ 180^\circ+K.360^\circ \end{cases}$$

$$\cos x-1=0 \longrightarrow \cos x=1 \longrightarrow x=0^\circ+K.360^\circ$$

Como ves, esta segunda ecuación es consecuencia de la primera, cosa que se podía preveer, porque si el cos x es 1, el sen x tendrá que ser: $\pm\sqrt{1-1^2}=0$

Entre las infinitas soluciones que tiene la ecuación dada, escribe las tres que son, en módulo, menores de 360°:

$$x_1=0° \qquad x_2=180° \qquad x_3=-180°$$

Comprueba que estas tres soluciones verifican la ecuación:

$$\text{sen } x=\text{tg } x.$$

En resúmen:

Para resolver una ecuación trigonométrica con una sola función circular, se despeja primero esta función.

Y para resolver ecuaciones trigonométricas, que tienen dos o más funciones circulares, se agregan a la ecuación, algunas identidades entre las funciones circulares de un mismo ángulo.

EJERCICIOS

1. Resuélvanse las siguientes ecuaciones:

$$\text{sen } x=\frac{1}{2} \qquad \cos x=-\frac{1}{2} \qquad \text{tg } x=1$$

2. Suponiendo que se conoce ctg x, hállense las fórmulas que permiten calcular sen x, cos x, y tg x, en función de ctg x.

3. Resuélvase la ecuación: $\text{tg } x+\frac{1}{\text{tg } x}=2.$

4. Resuélvase la ecuación: $\cos x=\text{tg } x.$

Tema 5.°

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

1. Relaciones en el triángulo rectángulo.

Traza un triángulo rectángulo, como el A B C, de la figura 10. Toma un eje de abcisas, X' X, que contenga al cateto B A; y por B, traza un eje de ordenadas Y' Y, perpendicular al de abcisas, y de forma que el ángulo agudo B, esté en el interior del ángulo X O Y. Llama *a b c* los lados respectivamente opuestos a los vértices A, B, C.

Para hallar las razones trigonométricas del ángulo agudo B, bas-

tará suponer que el vértice C, es el extremo de un arco correspondiente a ese ángulo agudo; el radio de ese arco será entonces la hipotenusa *a;* la ordenada y la abcisa del extremo serán las medidas de los catetos *b* y *c* con la unidad *a,* por lo cual el seno de B será la relación entre el cateto opuesto *b* y la hipotenusa, etc.

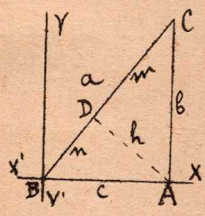

Fig. 10.

Escribe las fórmulas que dan las cuatro razones trigonométricas de ese ángulo B:

$$\text{sen } B=\frac{b}{a} \quad \cos B=\frac{c}{a} \quad \text{tg } B=\frac{b}{c} \quad \text{ctg } B=\frac{c}{b}$$

Lo que decimos del ángulo B, puede decirse del C, sin más que suponer que se coloca el vértice C, en el origen de coordenadas, y el cateto b, en el eje de abcisas.

Despeja los numeradores de las fórmulas anteriores:

$$b=a.\text{sen } B \qquad c=a.\cos B \qquad b=c.\text{tg } B \qquad c=b.\text{ctg } B$$

A estas relaciones hay que agregar la relación entre los ángulos agudos, que como sabes, son suplementarios; exprésalo:

$$B+C=90^\circ=\frac{\pi}{2}$$

También entre los tres lados se verifica la relación dada por el teorema de Pitágoras; escríbela: $b^2+c^2=a^2$.

Esta relación ya sabes demostrarla por semejanza de triángulos y por áreas, pero también puede obtenerse por método Trigonométrico. A este fin, traza la altura A D, perpendicular a la hipotenusa, y llama *h* esa altura, y *m, n* los segmentos C D, D B, en que divide a la hipotenusa.

La altura divide al triángulo rectángulo total, en dos triángulos rectángulos parciales; y cada ángulo agudo B o C pertenece al triángulo total, y a uno de los parciales.

Halla el valor del coseno de C y de B en cada uno de los triángulos, y deduce el valor de b^2 y el de c^2, y el de su suma:

$$\left.\begin{array}{l}\cos C=\dfrac{b}{a}=\dfrac{m}{b} \longrightarrow b^2=a.m \\ \cos B=\dfrac{c}{a}=\dfrac{n}{c} \longrightarrow c^2=a.n\end{array}\right\} \longrightarrow b^2+c^2=a.(m+n)=a.a=a^2$$

lo cual demuestra el *teorema de Pitágoras,* y de paso, el teorema que dice que *cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.*

En fin, también por Trigonometría se puede demostrar que la altura *h* es media proporcional entre los dos segmentos *m* y *n;* para lo

cual, halla la tangente de cada ángulo agudo en el triángulo parcial correspondiente:

$$\text{tg } B=\frac{h}{n} \qquad \text{tg } C=\frac{h}{m}$$

Pero recuerda que la ctg de un ángulo, es igual a la inversa de la tg, y también es igual a la tg de su complemento; aplícalo, y deduce el valor de h^2:

$$\text{ctg } C=\frac{1}{\text{tg } C}=\text{tg } B=\frac{m}{h}=\frac{h}{n} \longrightarrow h^2=m.n$$

En resumen:

En todo triángulo rectángulo se verifica:

1.° que el seno de un ángulo agudo es igual a la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa;

2.° que el coseno es igual a la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa;

3.° que la tg es igual a la razón entre el cateto opuesto y el adyacente;

4.° que la ctg es igual a la razón entre el cateto adyacente y el opuesto.

Estas fórmulas son consecuencia inmediata de las definiciones de las razones trigonométricas. De ellas se deduce el valor de un cateto, sin más que despejar los numeradores resultando:

1.° que un cateto es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto al cateto, o por el coseno del ángulo comprendido;

2.° que un cateto es también igual al producto del otro cateto por la tg del ángulo opuesto al primero o por la ctg del ángulo opuesto al segundo.

A estas fórmulas hay que agregar la que expresa que *los ángulos agudos son suplementarios,* así como el *teorema de Pitágoras,* que se puede deducir de las anteriores, trazando la altura perpendicular a la hipotenusa.

Las mismas fórmulas permiten demostrar fácilmente que *cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección del cateto sobre ella,* y también que, *la altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que la divide.*

2. Determinación del triángulo rectángulo.

Un triángulo rectángulo queda determinado, en general, cuando se dan dos elementos, que no sean los dos angulares, verificándose el cálculo de los elementos desconocidos, mediante las fórmulas estudiadas. Es claro, que si nos dieran dos elementos angulares, por ejemplo, los dos ángulos agudos, en realidad es como si no se nos diera más que uno, pues el otro debe ser su complementario.

En particular, si los dos elementos que se nos den han de ser lados o ángulos del triángulo, podrán presentarse cuatro casos:

Resolver un triángulo rectángulo conocidos:

1.° La hipotenusa y un cateto;
2.° Los dos catetos;
3.° La hipotenusa y un ángulo agudo;
4.° Un cateto y un ángulo agudo.

En vez de alguno de estos elementos podría darse la altura perpendicular a la hipotenusa; o el área, etc.

En resumen:

Para determinar en magnitud un triángulo rectángulo, bastan generalmente dos elementos.

3. Caso de la hipotenusa y un cateto.

Supongamos que se quiere resolver un triángulo rectángulo conocidas la hipotenusa, *a*, y un cateto, *b*. Resolver el triángulo quiere decir determinar los demás lados y ángulos.

La *construcción* del triángulo, es sencilla; construye un ángulo recto; sobre uno de sus lados toma el cateto conocido, a partir del vértice; haciendo centro en el otro extremo del segmento que se ha tomado igual al cateto, traza un arco, con la hipotenusa por radio; ese arco cortará, al otro lado del ángulo recto, en el tercer vértice del triángulo, siempre que la hipotenusa que nos dan sea mayor que el cateto.

El *cálculo* de los otros tres elementos se realiza recordando las fórmulas que nos dan las incógnitas, B, C y c; escríbelas:

$$\text{sen } B = \frac{b}{a} \qquad \cos C = \frac{b}{a} \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b).(a-b)}$$

aunque se puede también calcular B, después el C, como complemento, y el *c*, así: c=a sen C.

Las tres fórmulas anteriores son calculables por logaritmos, aplicando las propiedades generales de los logaritmos; aplícalas:

$$\log \text{sen } B = \log b - \log a = \log \cos C$$

$$\log c = \frac{1}{2}[\log (a+b) + \log (a-b)]$$

En resúmen:

Si se dan la hipotenusa y un cateto se aplican las fórmulas generales, que son calculables por logaritmos.

4. Caso de los dos catetos.

Supongamos ahora que se quiere resolver un triángulo rectángulo conocidos los catetos, *b, c.*

La *construcción* se reduce a trazar un ángulo recto, y tomar en sus lados los catetos, cuyos extremos libres serán los otros dos vértices.

El cálculo se realiza mediante las fórmulas, que sabes; escríbelas:

$$\text{tg } B = \frac{b}{c} = \text{ctg } C \qquad a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

siendo las dos primeras calculables por logaritmos; indícalo:

$$\log \text{tg } B = \log b - \log c = \log \text{ctg } C$$

Como la última no lo es, lo más sencillo será hallar primero un ángulo; después el otro será su complemento; y la hipotenusa se calcula, por ejemplo, por la fórmula $b = a \text{ sen } B$; deduce a, y su logaritmo:

$$a = \frac{b}{\text{sen } B} \longrightarrow \log a = \log b - \log \text{sen } B$$

5. Caso de la hipotenusa y un ángulo.

Supongamos ahora conocidas *a* y $\hat{B}$.

La *construcción* del triángulo puedes hacerla, tomando la hipotenusa como diámetro y trazando una semicircunferencia; por un extremo, B, de ese diámetro traza una recta, BA, que forme con el diámetro un ángulo igual al dado; y el punto A de intersección de esa recta con la semicircunferencia será el vértice del ángulo recto. Pues es sabido por Geometría, que el ángulo inscrito en una circunferencia tiene de amplitud la mitad de la amplitud del arco que interceptan sus lados; y como ese ángulo A, está inscrito en una semicircunferencia, sus lados interceptan un arco de 180° y él valdrá la mitad, o sea 90°.

El cálculo se realiza por las fórmulas que conoces; escríbelas:

$$b=a \operatorname{sen} B \qquad c=a \cos B \qquad C=90^\circ-B$$

siendo las dos primeras calculables por logaritmos; indícalo:

$$\log b=\log a+\log \operatorname{sen} B \qquad \log c=\log a+\log \cos B$$

6. Caso de un cateto y un ángulo.

Supongamos ahora que se dan un cateto, *b* y un ángulo agudo, tal como el $\hat{B}$. Si fuera el $\hat{C}$, su complemento sería el $\hat{B}$.

La *construcción* la puedes efectuar, trazando un ángulo recto; tomando en uno de sus lados el cateto conocido, *b,* a partir del vértice; y por el extremo libre de este cateto, traza una recta que forme con él un ángulo igual al $\hat{C}$, complemento del $\hat{B}$. Esa recta cortará al otro lado del ángulo recto en el tercer vértice del triángulo.

El *cálculo* se hace por las fórmulas conocidas; escríbelas:

$$b=a \operatorname{sen} B \qquad b=c \operatorname{tg} B \qquad B+C=90^\circ$$

Deduce a, c, C:

$$a=\frac{b}{\operatorname{sen} B} \qquad c=\frac{b}{\operatorname{tg} B} \qquad C=90^\circ-B$$

Observación.—No es preciso recordar las fórmulas que se aplican a cada caso, pues basta escribir las relaciones entre los lados y ángulos del triángulo rectángulo, mas el teorema de Pitágoras, y buscar en cada problema, entre esas fórmulas, aquellas que contienen una sola incógnita, pues se podrá despejar en ellas.

EJERCICIOS

1. En el triángulo cuyos catetos son 3^m y 4^m calcúlense los ángulos en grados, minutos y segundos. (R: 36° 52' 12" y 53° 7' 48").

2. Dados, dos elementos (además del A) calcular los otros en un triángulo cuyos elementos son:

$$A=90^\circ \qquad B=38^\circ\ 51'\ 23'' \qquad C=51^\circ\ 8'\ 37''$$
$$b=362{,}777 \qquad c=450{,}295 \qquad a=578{,}25$$

Tema 6.°

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE ÁNGULOS

1. Ejes y vectores.

Traza una recta *m,* (fig. 11); suponte que esta recta es recorrida por un punto que se mueve en un sentido determinado, por ejemplo, de izquierda a derecha; entonces este sentido lo puedes indicar con una flecha, y considerarlo como positivo, y el sentido contrario, como negativo.

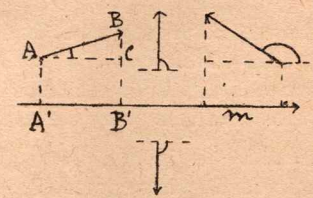

Fig. 11.

Una recta en la cual se fija un sentido positivo, se llama *eje.*

Traza un segmento AB, y suponte que es recorrido por un punto que empieza a moverse en A y acaba en B; entonces, el punto A se llama *origen,* y el punto B, *extremo;* ese sentido AB lo puedes indicar también con una flecha. Cuando en un segmento, como el AB, se fija un sentido, se tiene lo que se llama un *vector,* en el cual se debe considerar, la longitud, la recta de posición, y el sentido. El vector AB se designa: $\overrightarrow{AB}$.

Para hallar el ángulo que forma el vector $\overrightarrow{AB}$ con el eje m, o el que forma con un vector del mismo sentido que el eje *m,* traza por el origen del vector, un semieje, AC, paralelo y del mismo sentido que el eje *m;* entonces, el ángulo CAB, que debes marcar con un pequeño arco, será el ángulo formado por el eje y el vector.

Traza otro vector que forme un ángulo obtuso, con el eje *m,* como el vector que hay en la derecha de la misma figura; y traza dos vectores de sentidos contrarios, que formen ángulos rectos con el eje, como los dos vectores de enmedio de la figura.

En resúmen:

Se llama *eje* una recta en la cual se ha fijado un sentido; y se llama *vector* un segmento en el cual se ha fijado un sentido, es decir, el punto origen y el punto extremo.

2. Proyección de un vector sobre un eje.

Por los extremos A y B del vector $\overrightarrow{AB}$, traza las perpendiculares al eje *m;* sus pies, A' y B', se llaman proyecciones de A y B sobre el

eje; y el vector $\overrightarrow{A'B'}$ se llama proyección del vector AB sobre el eje *m*.

Proyecta igualmente los otros vectores sobre el mismo eje.

El vector AB, que forma un ángulo agudo con el eje, tiene por proyección otro vector, que tiene el mismo sentido que el eje, y que por eso se considera, como proyección *positiva;* en cambio el vector de la derecha, que forma un ángulo obtuso con el eje, tiene sobre él, una proyección *negativa,* porque esa proyección es un vector de sentido contrario al sentido positivo del eje.

Los vectores perpendiculares al eje tienen proyecciones nulas.

Se puede calcular la proyección de un vector sobre un eje en función de la longitud del vector, y del ángulo que forma con el eje, sin más que aplicar la definición de coseno de un ángulo.

Llamemos α el ángulo formado por un vector AB con un eje *m,* es decir, el ángulo formado por ese vector con el semieje AC, que parte del origen del vector, y que es paralelo y del mismo sentido que el eje *m*.

El coseno de α se puede hallar tomando el semieje AC como semieje de abcisas positivas; tomando el punto A como origen de coordenadas, y el extremo B, como extremo de un arco correspondiente al ángulo α. Entonces, proyectando el extremo B sobre la recta AC, y llamando C a esa proyección de B, resultará que la abcisa del extremo B será la medida del vector AC, tomando por unidad la longitud del vector AB; es decir, tal abcisa será la razón entre AC y AB, abcisa que es igual, por definición, al coseno de α; exprésalo y deduce el valor de la proyección del vector:

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} \longrightarrow AC = AB.\cos\alpha \longrightarrow A'B' = AB.\cos\alpha$$

Según que el ángulo α sea agudo u obtuso, así la proyección A' B' será positiva o negativa, puesto que el coseno será positivo o negativo. Y si el ángulo α es recto, su coseno, y por tanto la proyección, serán nulos.

En resúmen:

Se llama proyección de un vector sobre un eje, al vector que tiene por origen y por extremo las proyecciones del origen y del extremo del dado.

La proyección de un vector sobre un eje es igual al producto de la longitud del vector por el coseno del ángulo formado por el vector con el eje.

Este teorema es una consecuencia de la definición de coseno.

3. Proyección de una quebrada sobre un eje.

Traza varios vectores AB, BC, CD, DE, que formen una quebrada, (fig. 12); el vector AE, se llama resultante o suma geométrica de esos 4 vectores.

Este vector AE, que es resultante de los cuatro vectores, tiene por origen el origen del primero, y tiene por extremo, el extremo del último; expresa el valor de la suma:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$$

Asimismo, halla las proyecciones de aquellos cuatro vectores sobre un eje *m;* las cuatro proyecciones son otros vectores, A'B', B'C', C' D', D' E', tales que el extremo de cada uno, excepto el del último, coincide con el origen del siguiente. El vector A'E', que tiene por origen el del primero, y por extremo el del último, se llama también *resultante* o *suma geométrica* de estos otros vectores. En este caso en que los dichos vectores están sobre un mismo eje *m,* esa suma se puede calcular sumando algebraicamente los números positivos o negativos que miden las longitudes relativas de los cuatro vectores, y por eso a la suma geométrica de éstos se la llama también suma algebráica; expresa esa suma:

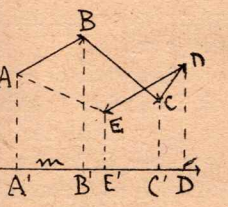

Fig. 12.

$$\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{D'E'}=\overrightarrow{A'E'}$$

En fin, pueden darse vectores que estén situados en cualquier forma; por ejemplo, dos vectores que tengan el mismo origen, y en todo caso, se llama resultante o suma geométrica a otro vector que se puede hallar trazando otros vectores que tengan igual longitud, igual dirección e igual sentido que los dados, pero tales que el extremo de cada uno, excepto el del último, coincide con el origen del siguiente. La suma geométrica de estos otros vectores, se llama también suma geométrica de los primeros.

Halla en esta forma la suma geométrica de dos vectores que tengan el mismo origen, y verás que es igual en longitud, dirección y sentido a la *diagonal de un paralelogramo* cuyos lados son los dos vectores dados.

En la figura 12 puedes observar que la proyección de AE, es A'E', lo que te dice que la proyección de la suma geométrica de varios vectores es igual a la suma algebráica de las proyecciones de los sumandos.

Y en particular, si el extremo E coincide con el origen A, esa proyección será nula.

En resúmen:

Se llama *resultante o suma geométrica* de varios vectores a otro vector que se forma trazando vectores paralelos a los dados, y del mismo sentido y longitud que ellos, de tal manera que el extremo de cada uno, excepto del último, coincida con el origen del siguiente; la resultante es el vector que tiene por origen el del primero, y por extremo el del último.

Si todos los vectores están sobre un eje, su resultante se llama también su *suma algebráica*.

Y si se trata de dos vectores que tienen el mismo origen, su resultante es la diagonal del paralelogramo construído con ellos.

La proyección de la resultante sobre un eje, es igual a la suma de las proyecciones de los vectores dados.

En particular, si varios vectores forman una quebrada cerrada, su proyección sobre cualquier eje será nula, porque su resultante es nula.

4. Seno y coseno de la suma de dos ángulos.

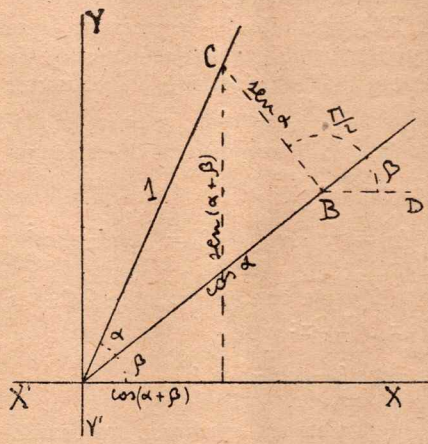

Fig. 13.

Suponte que se quiere hallar el seno y el coseno de la suma de dos ángulos $(\alpha+\beta)$, en función del seno y el coseno de α y de β.

Para ello, traza dos ejes de coordenadas rectangulares, que se corten en un punto origen, O, siendo X' X el eje de abcisas, e Y' Y el eje de ordenadas (fig. 13).

A partir del eje de abcisas, toma el ángulo β, y a continuación, el ángulo α. En el lado extremo del α, toma un punto C, que puedes con-

siderar como extremo de un arco correspondiente al ángulo $(\alpha+\beta)$, siendo el radio de ese arco, el vector OC, cuya longitud la tomaremos como unidad de longitudes. Con esta unidad, la medida de OC, será 1; indícalo en la figura. La proyección de OC sobre el eje de abcisas tendrá por medida $\cos(\alpha+\beta)$; indícalo en la figura, trazando antes la perpendicular al eje de abcisas, por C.

La proyección de OC sobre la paralela al eje de ordenadas, trazada por C, tendrá por medida $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$; indícalo en la figura.

Proyecta el vector OC sobre el lado común a los ángulos α y β, y la proyección, que es el vector OB, tendrá por medida $\cos\alpha$; indícalo.

El segmento proyectante del punto C, o sea B C, tendrá por medida $\operatorname{sen}\alpha$; indícalo.

Para hallar $\cos(\alpha+\beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$, fíjate en que el vector OC, es la resultante de los vectores OB y BC; exprésalo:

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$$

Recuerda ahora que la proyección de la resultante o suma geométrica, sobre un eje, es igual a la suma algebráica de las proyecciones de los sumandos.

Designando con los subíndices x, e y las medidas de las proyecciones de un vector sobre los ejes de coordenadas, halla las medidas de las proyecciones de los vectores OC y OB, sobre el eje de abcisas:

$$\text{medida de } \overrightarrow{OC}_x=1.\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta) \quad \text{m.}^{\text{da}} \text{ de } \overrightarrow{OB}_x=\cos\alpha.\cos\beta$$

fórmulas que provienen de que la proyección de una vector es igual al producto del vector por el coseno del ángulo que forma con el eje.

Para hallar la proyección de BC sobre el eje de abcisas, traza por B un semieje BD, paralelo y del mismo sentido que el semieje de abcisas positivas, y observarás que el ángulo formado por el vector BC con cualquiera de esos semiejes es $(\beta+\frac{\pi}{2})$; indícalo, y halla la proyección BC_x, observando, además, que el complemento de ese ángulo es $(-\beta)$:

$$\text{medida de } \overrightarrow{BC}_x=\operatorname{sen}\alpha.\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}(-\beta)=-\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta$$

Sustituye estos valores en la fórmula que exprese que OC_x es igual a la suma algebráica de OB_x y BC_x:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

El seno de $(\alpha+\beta)$ se halla de la misma manera, expresando que la proyección de la resultante OC sobre el eje de ordenadas, o

su paralela por C, es igual a la suma de las proyecciones de los componentes OB y BC; exprésalo:

$$\overrightarrow{OC_y} = \overrightarrow{OB_y} + \overrightarrow{BC_y}$$

El ángulo que el vector OB forma con el eje de ordenadas es el complemento del ángulo β, o sea $\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$; y el ángulo que forma el el vector BC con el eje de ordenadas, es el ángulo β; halla las medidas de las proyecciones de esos dos vectores sobre el eje de ordenadas:

$$\text{medida de } \overrightarrow{OB_y} = \cos\alpha.\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta$$

$$\text{medida de } \overrightarrow{BC_y} = \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta$$

Expresa ahora que el valor de $\overrightarrow{OC_y}$ es suma de estas dos expresiones, poniendo al principio la 2.ª:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta$$

Como los teoremas sobre proyecciones son generales, lo serán las fórmulas obtenidas. Estas fórmulas del seno y el coseno de $(\alpha+\beta)$, debes aprenderlas de memoria, lo cual se facilita observando que en el primer cuadrante, al crecer el ángulo, crece el seno y decrece el coseno, con lo cual se recuerda que el seno de $(\alpha+\beta)$ es una suma, y el coseno de $(\alpha+\beta)$ es una diferencia. Además, es útil esta regla nemotécnica: el seno es igual a seno-coseno mas coseno-seno; y el coseno es igual a coseno-coseno menos seno-seno.

En resumen:

El seno y el coseno de la suma de dos ángulos, vienen dados por estas fórmulas:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a.\cos b + \cos a.\operatorname{sen} b$$
$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b$$

Se demuestran fundándose en los teoremas sobre proyecciones.

5. Seno y coseno de la diferencia de dos ángulos.

Para hallar el seno y el coseno de la diferencia $(\alpha-\beta)$, basta que la transformes en suma, apliques las fórmulas del párrafo anterior, y

recuerdes que es: $\text{sen}\,(-\beta)=-\text{sen}\,\beta$; $\cos(-\beta)=\cos\beta$; hazlo así:

$$\text{sen}\,(\alpha-\beta)=\text{sen}\,(\alpha+\overline{\beta})=\text{sen}\,\alpha.\cos\overline{\beta}+\cos\alpha.\text{sen}\,\overline{\beta}=$$
$$=\text{sen}\,\alpha.\cos\beta-\cos\alpha.\text{sen}\,\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+\overline{\beta})=\cos\alpha.\cos\overline{\beta}-\text{sen}\,\alpha.\text{sen}\,\overline{\beta}=$$
$$=\cos\alpha.\cos\beta+\text{sen}\,\alpha.\text{sen}\,\beta$$

Como ves, las fórmulas obtenidas son análogas a las que dan el seno y el coseno de $(\alpha+\beta)$, pero cambiando el $+$ del seno en $-$, y el $-$ del coseno, en $+$.

En resumen:

Las fórmulas que dan el seno y el coseno de la diferencia de dos ángulos, son análogas a las que dan el seno y el coseno de la suma, pero cambiando los signos $+$ y $-$, por los signos $-$ y $+$, respectivamente.

Para obtenerlas, se transforma la diferencia en suma.

6. Tangente de la suma y diferencia de dos ángulos.

Para hallar tg (a+b) en función de tg a y de tg b, aplica la definición de tg, que es igual al seno, partido por el coseno; desarrolla ese seno y coseno, y divide los dos miembros de la fracción por el producto de los cosenos:

$$\text{tg}\,(a+b)=\frac{\text{sen}\,(a+b)}{\cos\,(a+b)}=$$

$$=\frac{\text{sen}\,a.\cos b+\cos a.\text{sen}\,b}{\cos a.\cos b-\text{sen}\,a.\text{sen}\,b}=\frac{\dfrac{\text{sen}\,a.\cos b}{\cos a.\cos b}+\dfrac{\cos a.\text{sen}\,b}{\cos a.\cos b}}{\dfrac{\cos a.\cos b}{\cos a.\cos b}-\dfrac{\text{sen}\,a.\text{sen}\,b}{\cos a.\cos b}}=\frac{\text{tg}\,a+\text{tg}\,b}{1-\text{tg}\,a.\text{tg}\,b}$$

Para obtener la fórmula de tg (a−b) se puede seguir un procedimiento análogo, o bien transformar la suma en diferencia, y recordar que es tg $(-b)=-$tg b; hazlo así:

$$\text{tg}\,(a-b)=\text{tg}\,(a+\overline{b})=\frac{\text{tg}\,a+\text{tg}\,\overline{b}}{1-\text{tg}\,a.\text{tg}\,\overline{b}}=\frac{\text{tg}\,a-\text{tg}\,b}{1+\text{tg}\,a.\text{tg}\,b}$$

En resúmen:

La tangente de (a+b) se puede expresar por esta fórmula:

$$\text{tg}\,(a+b)=\frac{\text{tg}\,a+\text{tg}\,b}{1-\text{tg}\,a.\text{tg}\,b}$$

Para demostrarla se aplica la definición de tangente como cociente entre el seno y el coseno; se desarrollan el numerador y el denominador, y se dividen ambos por el producto de los cosenos.

La tangente de $(\alpha-\beta)$ se expresa por una fórmula análoga, pero permutando los signos +y—. Se puede obtener en forma análoga, o transformando la suma en diferencia.

EJERCICIOS

1. Siendo: $\cos 60^\circ=\operatorname{sen} 30^\circ=\frac{1}{2}$, y siendo: $\cos 30^\circ=\operatorname{sen} 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, calcular por las fórmulas de adición y sustracción de ángulos: $\operatorname{sen}(60^\circ+30^\circ)$ $\cos(60^\circ+30^\circ)$ $\operatorname{sen}(60^\circ-30^\circ)$ y $\cos(60^\circ-30^\circ)$, debiendo dar resultados ya conocidos.
2. Siendo $\operatorname{tg} 45^\circ=1$, aplicar las fórmulas de adición y sustracción de ángulos para calcular $\operatorname{tg}(45^\circ+45^\circ)$, y también $\operatorname{tg}(45^\circ-45^\circ)$, debiendo dar resultados ya conocidos.
3. Calcular $\operatorname{sen} 15^\circ$, $\cos 15^\circ$ y $\operatorname{tg} 15^\circ$, observando que es $15^\circ=60^\circ-45^\circ$.
4. Calcular $\operatorname{sen} 75^\circ$, $\cos 75^\circ$ y $\operatorname{tg} 15^\circ$, observando que es $75^\circ=45^\circ+30^\circ$

Tema 7.°

DUPLICACIÓN DE ÁNGULOS

1. Razones trigonométricas del duplo de un ángulo.

Dado un ángulo x puedes hallar las fórmulas que dan el seno, el coseno y la tangente de 2 x sin más que aplicar las fórmulas sobre adición de ángulos, al caso del ángulo x+x; aplícalas:

$$\operatorname{sen} 2x=\operatorname{sen}(x+x)=\operatorname{sen} x.\cos x+\cos x.\operatorname{sen} x=2\operatorname{sen} x.\cos x$$

$$\cos 2x=\cos(x+x)=\cos x.\cos x-\operatorname{sen} x.\operatorname{sen} x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg}(x+x)=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x.\operatorname{tg} x}=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$$

De las tres fórmulas obtenidas, la más interesante es la que da el cos 2 x que suele expresarse solo en función del sen x o solo en función del cos x aplicando para ello la relación entre el seno y el coseno de un mismo ángulo; aplícala:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) =$$

$$= \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

En resumen:

Las tres primeras razones trigonométricas del duplo de un ángulo, se expresan en función de las de este ángulo, por estas fórmulas:

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x . \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

Para obtener estas fórmulas basta aplicar las fórmulas de adición de ángulos a la expresión (x+x).

En particular, el cos 2 x se expresa fácilmente en función del sen x, o del cos x, aplicando la relación entre el seno y el coseno de un mismo ángulo; obteniéndose:

$$\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \qquad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

2. Razones trigonométricas del ángulo mitad de otro.

Puedes obtener $\operatorname{sen} \frac{a}{2}$ y $\cos \frac{a}{2}$ en función de cos a, haciendo $2x = a$, o sea $x = \frac{a}{2}$ en las fórmulas que dan cos 2 x en función de sen x, o de cos x; haz esa sustitución, y escribe las fórmulas que resultan:

$$\cos a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} \qquad \cos a = 2\cos^2 \frac{a}{2} - 1$$

Estas fórmulas se suelen escribir transponiendo términos de manera que los primeros miembros sean respectivamente 1−cos a y 1+cos a; halla los valores de estos binomios

$$1 - \cos a = 2\operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} \qquad 1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{a}{2}$$

Estas dos identidades trigonométricas se aplican mucho, y se llaman fórmulas de Mendoza, y también fórmulas de los doses, porque en los segundos miembros está el número 2, tres veces; una como factor, otra como exponente y otra como divisor.

Si quieres obtener directamente las fórmulas de Mendoza, expresa que el número 1 es igual a la suma de $\text{sen}^2\frac{a}{2}$ y $\cos^2\frac{a}{2}$, y halla cos *a*, descomponiendo *a* en la suma $\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$.

$$1=\text{sen}^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{a}{2}$$

$$\cos a=\cos\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)=\cos^2\frac{a}{2}-\text{sen}^2\frac{a}{2}$$

Si restas los primeros miembros y los últimos, obtienes la primera fórmula de Mendoza; y si los sumas, obtienes la segunda.

También puedes obtenerlas geométricamente, como se explica en los ejercicios.

En las fórmulas de Mendoza puedes despejar inmediatamente los valores de $\text{sen}\frac{a}{2}$ y de $\cos\frac{a}{2}$, en función de cos a; pero es más interesante expresar en función de este cos a, el valor de $\text{tg}\frac{a}{2}$, para lo cual divides miembro a miembro esas fórmulas, y extraes luego la raíz cuadrada; hazlo:

$$\frac{1-\cos a}{1+\cos a}=\frac{2\ \text{sen}^2\frac{a}{2}}{2\ \cos^2\frac{a}{2}}=\text{tg}^2\frac{a}{2}\ \longrightarrow\ \text{tg}\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

En el caso de que el ángulo *a* sea ángulo de un triángulo, no se escribe el doble signo, porque $\frac{a}{2}$ será ciertamente un ángulo agudo, y su tangente será positiva.

En resúmen:

Para obtener las razones trigonométricas de la mitad de un ángulo, en función del coseno de este ángulo, se hallan antes las fórmulas de Mendoza, o fórmulas de los doses, que son:

$$1-\cos a=2\ \text{sen}^2\frac{a}{2}$$

$$1+\cos a=2\ \cos^2\frac{a}{2}$$

Estas fórmulas se obtienen, o bien fundándose en las de cos 2 x, haciendo 2 x=a, o bien, directamente.

De ellas se deduce inmediatamente el sen $\frac{a}{2}$ y el cos $\frac{a}{2}$,

y por división, se deduce $\text{tg}\,\frac{a}{2}$, que, en el caso más usual de que el ángulo *a* sea positivo y menor que un llano, será:

$$\text{tg}\,\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

3. Transformación de sumas en productos.

Las sumas o diferencias de senos o de cosenos, es decir, las expresiones de esta forma: sen A+sen B; o bien: cos A−cos B; etc., tienen el inconveniente de no ser calculables directamente por logaritmos, y conviene transformarlas en productos, porque el logaritmo de un producto se puede expresar como suma de los logaritmos de sus factores.

Para hacer aquella transformación, puedes llamar p la semisuma de A y B, y llamar q la semidiferencia de A y B; exprésalo y deduce los valores de A y B en función de p y q, sin más que sumar o restar las igualdades:

$$\left.\begin{aligned}\frac{A+B}{2}&=p\\ \frac{A-B}{2}&=q\end{aligned}\right\}\longrightarrow\left\{\begin{aligned}A&=p+q\\ B&=p-q\end{aligned}\right.$$

Sustituye ahora A y B por esta suma o diferencia, en las expresiones que queremos transformar, y aplica las reglas de adición o sustracción de ángulos;

$$\text{sen A}+\text{sen B}=\left\{\begin{matrix}\text{sen (p+q)}\\ +\\ \text{sen (p−q)}\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\text{sen p cos q}+\text{cos p sen q}\\ \text{mas}\\ \text{sen p cos q}-\text{cos p sen q}\end{matrix}\right\}=2\,\text{sen p cos q}$$

Si ahora sustituyes en el último miembro la p y q por sus valores en función de A y B, obtienes la fórmula de transformación de la suma de dos senos en producto, escríbela:

$$\text{sen A}+\text{sen B}=2\,\text{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

fórmula que se puede enunciar: *la suma de los senos de dos ángulos es igual al duplo del seno de la semisuma por el coseno de la semidiferencia.*

En forma análoga puedes transformar la diferencia de los senos

de A y B, la suma de los cosenos y la diferencia de los cosenos; haz la transformación de la diferencia de los senos de A y de B:

$$\text{sen A}-\text{sen B}=\left\{\begin{matrix}\text{sen (p+q)}\\ \text{menos}\\ \text{sen (p-q)}\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\text{sen p cos q}+\text{cos p sen q}\\ \text{menos}\\ \text{sen p cos q}-\text{cos p sen q}\end{matrix}\right\}=2\,\text{cos p sen q}$$

Sustituye p y q por su valor, y escribe la fórmula resultante:

$$\text{sen A}-\text{sen B}=2\,\cos\frac{A+B}{2}\,.\,\text{sen}\frac{A-B}{2}$$

Las fórmulas que sirven para transformar la suma o la diferencia de cosenos, puedes verlas en los ejercicios.

Divide miembro a miembro las dos fórmulas que acabas de obtener, y aplica la definición de tangente:

$$\frac{\text{sen A}+\text{sen B}}{\text{sen A}-\text{sen B}}=\frac{2\,\text{sen}\dfrac{A+B}{2}\,.\cos\dfrac{A-B}{2}}{2\cos\dfrac{A+B}{2}\,.\,\text{sen}\dfrac{A-B}{2}}=\frac{\text{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\text{tg}\dfrac{A-B}{2}}$$

En resúmen:

La suma de los senos de dos ángulos es igual al duplo del seno de la semisuma por el coseno de la semidiferencia de esos ángulos.

La diferencia de los senos de dos ángulos es igual al duplo del coseno de la semisuma por el seno de la semidiferencia.

Estos teoremas se demuestran designando con dos letras la semisuma y la semidiferencia de los dos ángulos, y aplicando las reglas de adición y sustracción de ángulos.

Por división de las fórmulas obtenidas, se deduce que: *La suma de senos es a su diferencia como la tangente de la semisuma es a la tangente de la semidiferencia.*

EJERCICIOS

1. Demostrar que el sen 2 α en función de sen α solamente, viene dado por la fórmula:

$$\text{sen } 2\,\alpha=\pm 2\,\text{sen }\alpha\,.\,\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}\,.$$

2. Sabiendo que el seno de 30° es igual al coseno de 60°, y por tanto, igual a 1/2, calcular por la fórmula anterior el seno de 60°, y comprobarlo.

3. Calcular cos 120° sabiendo que el de 60° es 1/2.

4. Demostrar las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \qquad \cos\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$

5. Si en la fórmula que dá tg 2α en función de tg α se sustituye 2α por a, se obtiene:

$$\operatorname{tg} a=\frac{2\operatorname{tg}.\frac{a}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}.$$

Si en esta fórmula se considera como incógnita a tg $\frac{a}{2}$, se podrá despejar esta incógnita, como se hace en las ecuaciones de 2.° grado; demuéstrese que resulta:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a}$$

6. Para demostrar gráficamente las fórmulas de Mendoza, basta observar que sus primeros miembros, o sea: $1-\cos a$ y $1+\cos a$, son las medidas de los dos segmentos en que queda dividido el diámetro que pasa por el origen del arco por la proyección del extremo del arco, sobre ese diámetro. Si los extremos de tal diámetro, se unen con el extremo del arco, se forma un triángulo rectángulo, cuyos catetos tienen por medidas $2\operatorname{sen}\frac{a}{2}$, y $2\cos\frac{a}{2}$. Aplíquese el teorema del cateto, que dice que es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella, y dedúzcanse las fórmulas de Mendoza.

7. Demuéstrese la fórmula:

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}$$

8. Demuéstrese la fórmula:

$$\cos A-\cos B=-2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}.\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$

Tema 8.°

RELACIONES EN LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

1. Relaciones entre los lados y los ángulos opuestos.

Dibuja un triángulo A B C, que sea acutángulo, otro rectángulo, con el ángulo recto C, y otro obtusángulo, con el ángulo obtuso C, (fig. 14), y llama *a*, *b* *c* los lados respectivamente opuestos a los vértices A, B y C. Traza la altura A D que parte del vértice A, y llama *h* la distancia AD.

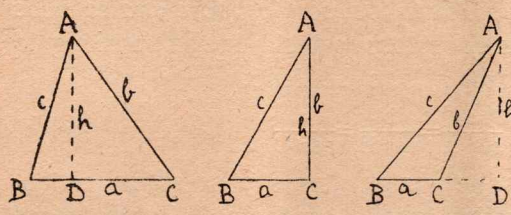

Fig. 14.

En el primer caso la altura AD divide al triángulo ABC en dos triángulos rectángulos, y en cada uno puedes expresar que el cateto *h* es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto al cateto.

Escribe las igualdades que lo expresan, y elimina entre ellas la altura *h:*

$$\left.\begin{array}{l} h=b.\text{sen } C \\ h=c.\text{sen } B \end{array}\right\} \longrightarrow b.\text{sen } C=c.\text{sen } B$$

Esta igualdad obtenida puedes ponerla en forma de proporción, colocando los factores del primer miembro, como extremos, y los factores del segundo, como medios; hazlo así:

$$\frac{b}{\text{sen } B}=\frac{c}{\text{sen } C}$$

Esta fórmula se verifica también en el caso del triángulo rectángulo, pues en ese caso es sen C=sen 90°=1; escribe la demostración en este caso:

$$b=c.\text{sen } B \longrightarrow b.\text{sen } C=c.\text{sen } B \longrightarrow \frac{b}{\text{sen } B}=\frac{c}{\text{sen } C}$$

Por fin, en el caso del triángulo obtusángulo, el triángulo ABC es

diferencia de dos triángulos rectángulos, y en ellos puedes también expresar el cateto *h;* hazlo:

$$\left.\begin{array}{l} h = c \operatorname{sen} B \\ h = b.\operatorname{sen}(180° - C) = b.\operatorname{sen} C \end{array}\right\} \longrightarrow c.\operatorname{sen} B = b.\operatorname{sen} C \longrightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Si en vez de trazar la altura que parte de A, trazas la que parte de B, obtienes otra proporción análoga; escríbela:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{a}{\operatorname{sen} A}$$

Esto nos dice que los tres lados (a, b, c) de un triángulo ABC, son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos, es decir a (sen A, sen B, sen C).

En resumen:

En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos; es decir, que en un triángulo ABC, de lados opuestos a, b, c, se tiene:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Para demostrarlo, se trazan alturas y se aplica el teorema de que un cateto es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto al cateto.

2. Proyección de dos lados sobre el tercero.

En el primer triángulo de la figura 14 puedes observar que el lado *a* es igual a la suma de las proyecciones de los otros dos lados sobre él; escribe la igualdad que lo expresa: $a = BC = BD + DC$.

Recordando que la proyección de un segmento sobre un eje es igual al producto del segmento que se proyecta, por el coseno del ángulo que forma con el eje, sustituye en la igualdad anterior las dos proyecciones por sus valores, dados por ese teorema:

$$a = c.\cos B + b.\cos C$$

Esta igualdad se verifica también en el segundo triángulo y en el tercero de la misma figura 14, lo cual se demuestra sin más que recordar que el coseno de 90° es cero, y que dos ángulos suplementarios tienen sus cosenos opuestos; escribe las demostraciones de esa fórmula, para el segundo triángulo y para el tercero:

$a = BC = c.\cos B = c.\cos B + b.\cos C$

$a = BC = BD - CD = c.\cos B - b.\cos(180° - C) = c.\cos B + b.\cos C$

Vemos, pues, que en todo caso, un lado *a*, de un triángulo, es igual a la suma de los productos de los otros dos lados, *b*, y *c*, por los cosenos de los ángulos, C y B, que forman con el primero.

Aplica el mismo teorema a los lados *b* y *c*, escribiendo las fórmulas correspondientes:

$$b = a.\cos C + c.\cos A$$
$$c = a.\cos B + b.\cos A$$

En resumen:

En todo triángulo, un lado cualquiera es igual a la suma de los productos de cada uno de los otros dos lados, por los cosenos de los ángulos que forman con el primero.

Para demostrarlo se proyectan esos dos lados sobre la recta que contiene al primero.

3. Cuadrado de un lado de un triángulo.

Ya recordarás, por haberlo estudiado en la Geometría, que «el cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, mas o menos el duplo de uno de ellos, por la proyección del otro sobre él»; siendo más, cuando el lado que se calcula se opone a un ángulo obtuso; siendo menos, cuando se opone a un ángulo agudo; y siendo nula esa proyección, cuando se opone a un ángulo recto.

Aplica el teorema al cálculo del lado *c*, en los tres triángulos de la figura 14:

1.º $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a.D\,C$

2.º $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2\,a.0$

3.º $c^2 = a^2 + b^2 + 2\,a.CD$

El segundo caso, no es otra cosa que el teorema de Pitágoras, y ya recordarás que el primero y el tercer caso, se demuestran trazando la altura *h*, y aplicando dos veces sucesivas el teorema de Pitágoras; escribe, por ejemplo, las igualdades que demuestran el primer caso:

$$c^2 = \overline{BD}^2 + h^2 = (a - DC)^2 + b^2 - \overline{DC}^2 =$$
$$= a^2 - 2\,a.DC + \overline{DC}^2 + b^2 - \overline{DC}^2 = a^2 + b^2 - 2\,a.DC$$

En los tres casos puedes sustituir la proyección por su valor en función del segmento que se proyecta, y del ángulo que forman; escribe las igualdades que resultan de esa sustitución:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a.b\,\cos C$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a.b\,\cos 90^\circ = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos C$$
$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b\,\cos (180^\circ - C) = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos C$$

Ves que en Trigonometria resulta una misma fórmula aplicable a los tres casos, que dice que *el cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble de su producto por el coseno del ángulo que forman.*

Aplica el mismo teorema al caso del lado *a:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A$$

La fórmula del cuadrado de un lado se puede obtener sin recurrir a la Geometría, deduciéndola de las tres fórmulas obtenidas en el párrafo anterior, al proyectar dos lados sobre el tercero.

Para ello, basta que multipliques los dos miembros de la igualdad que daba el lado *a,* es decir, de la igualdad: a=b.cos C+cos B, por *a;* los de la igualdad que da *b,* los multiplicas por *b;* y los de la igualdad que da *c,* los multiplicas por *c;* obtienes así tres nuevas igualdades, cuyos primeros miembros son a^2, b^2, c^2, y para obtener, por ejemplo la fórmula que dá a^2, te bastará restar miembro a miembro de la primera de esas tres igualdades, la suma de las otras dos; hazlo así.

En resumen:

El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo de su producto por el coseno del ángulo que forman.

Este teorema se puede deducir del teorema análogo de Geometría, y también se puede deducir de las tres igualdades que resultan proyectando cada dos lados de un triángulo sobre la recta que contiene al tercero.

4. Area de un triángulo.

Dibuja un triángulo ABC, de lados respectivamente opuestos, *a, b, c,* (fig. 15). Para calcular el área, basta que traces una altura, por ejemplo, la que parte del vertice B, o sea la BD, cuya longitud puedes llamar *h.* La base que corresponde a esta altura *h* es el lado *b,* y ya sabes por Geometría que «el área del triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura».

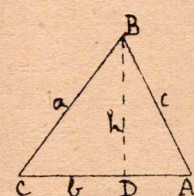

Fig. 15.

Pero en Trigonometría podemos expresar la altura *h* en función de un lado no perpendicular a ella, tal como el *a,* y de un ángulo, tal como C, sin más que recordar que un cateto del triángulo rectángulo, CDB, es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto

al cateto; y con esto podrás expresar el área del triángulo en función de dos lados y el ángulo comprendido; exprésala:

$$\text{área de ABC} = \frac{1}{2} b.h = \frac{1}{2} b \text{ a sen C}$$

Igual puedes expresarla en función de otros dos lados, tales como el *a* y *c*, y del ángulo comprendido; exprésala:

$$\text{área de ABC} = \frac{1}{2} a \text{ c sen B.}$$

En resúmen:

El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados, por el seno del ángulo comprendido.

Para demostrarlo, se recuerda que el área es igual a la mitad del producto de la base por la altura, y se elimina la altura, expresándola en función de un lado y un ángulo del triángulo.

5. Radios de las circunferencias circunscrita e inscrita.

Construye un triángulo y su circunferencia circunscrita, empezando, por ejemplo, por trazar una circunferencia, y trazando luego un triángulo ABC, de lados *a, b, c,* que esté inscrito en ella, es decir, que tenga sus vértices en la misma circunferencia; (fig. 16).

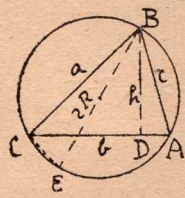

Fig. 16

Si hubieras empezado por construir el triángulo, ya sabes que el centro de su circunferencia circunscrita lo podrías hallar buscando el punto de concurso de las mediatrices de sus lados.

Traza el diámetro BE que parte de uno de los vértices del triángulo, y llámale 2 R, siendo R el radio de dicha circunferencia circunscrita.

Si el extremo E lo unes con un vértice, C, se te forma un triángulo rectángulo, BCE, porque el ángulo BCE está inscrito en una semicircunferencia, y será recto.

Puedes formar un triángulo semejante a dicho triángulo rectángulo, sin más que trazar la altura BD, que puedes llamar *h*. En efecto, dicho triángulo BCE, y el que ahora se ha formado, BDA, son semejantes por tener dos ángulos respectivamente iguales; uno es el ángulo recto, y otro es el ángulo E, que es igual al ángulo A, porque ambos están inscritos y abrazan el mismo arco BC.

Siendo semejantes esos triángulos, podrás escribir la proporcionalidad entre los lados que concurren en B, y sustituyendo en esa proporción, la altura *h* por su valor, en función de *a* y C, podrás deducir el valor de 2 R; dedúcelo:

$$\frac{2R}{c}=\frac{a}{h} \longrightarrow \frac{2R}{c}=\frac{a}{a \operatorname{sen} C}=\frac{1}{\operatorname{sen} C} \longrightarrow 2R=\frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Ves con esto que la relación constante que, según vimos en el párrafo 1, existe entre cada lado y el seno de su ángulo opuesto, es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita; exprésalo:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}=2R$$

Para calcular el radio de la circunferencia inscrita, traza otro triángulo, de lados *a, b, c,* (fig. 17), y traza las tres bisectrices interiores, que concurrirán en un punto, el cual es, como sabes, centro de la circunferencia inscrita; es decir, de la circunferencia tangente a los tres lados.

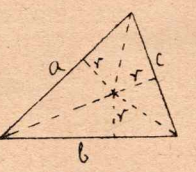

Fig. 17

El radio, *r,* de esta circunferencia será la distancia desde su centro a uno cualquiera de los tres lados; traza las tres distancias a los lados.

El triángulo dado ha quedado dividido por las bisectrices en otros tres triángulos, que tienen todos la misma altura *r,* y por bases los lados *a, b, c* del triángulo total. Expresa que el área, S, del triángulo total, es igual a la suma de las áreas de los tres triángulos parciales, y llamando *p* al semiperímetro del total, deduce de ello el valor del radio *r:*

$$S=\frac{1}{2}a\,r+\frac{1}{2}b\,r+\frac{1}{2}c\,r=\frac{1}{2}(a+b+c).r=p.r \longrightarrow r=\frac{S}{p}$$

En resúmen:

El diámetro de la circunferencia circunscrita a un triángulo es igual a la razón constante que existe entre cada lado y el seno de su ángulo opuesto;
y el radio de la circunferencia inscrita es igual a la razón entre el área del triángulo y el semiperímetro.

Para demostrar el primer teorema se traza la circunferencia circunscrita al triángulo, y se traza el diámetro que pasa por un vértice y la altura que parte de ese vértice; uniendo luego el otro extremo del diámetro, con otro vértice, se tienen dos triángulos rectángulos semejantes, de cuya semejanza se deduce el teorema.

Para demostrar el segundo teorema, se trazan las tres bisectrices interiores, y las distancias desde su punto de concurso a los tres lados, quedando el triángulo total dividido por esas bisectrices en tres triángulos parciales, cuya altura común es el radio de la circunferencia cirinscrita; expresando que el área del triángulo total, es igual a la suma de las áreas de los tres parciales, se deduce el teorema.

6. Expresión del área en función de los tres lados.

Tiene interés el poder expresar el área de un triángulo en función solamente de los tres lados, entre otras razones porque se podrán medir superficies triangulares o poligonales sin utilizar más instrumento que la cinta métrica, o una cuerda y un metro.

Ya sabes expresar el área en función de dos lados y del seno del ángulo comprendido; y también conoces las fórmulas que dan el cuadrado de un lado de un triángulo, cada una de las cuales relaciona el coseno de un ángulo, con los tres lados; por eso puedes empezar expresando el área en función de dos lados y del coseno del ángulo comprendido; exprésala:

$$S=\frac{1}{2}\ a\ b\ \text{sen}\ C=\frac{1}{2}a\ b.\sqrt{1-\cos^2 C}$$

Escribe ahora el valor del cos C en función de los tres lados, deduciéndolo de la fórmula que dá el cuadrado del lado *c:*

$$c^2=a^2+b^2-2\ a\ b\ \cos C \longrightarrow \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2\ a\ b}$$

Como buscamos la expresión del área S, en función de los tres lados, expresa primeramente el radicando antes escrito:

$$1-\cos^2 C=1-\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{(2\ a\ b)^2}=\frac{(2\ a\ b)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{(2\ a\ b)^2}$$

Para hacer más fácilmente calculable este segundo miembro, recuerda que la diferencia de los cuadrados de dos números es igual al producto de su suma por su diferencia, y aplica luego la fórmula que da el cuadrado de un binomio:

$$1-\cos^2 C=\frac{(2\ a\ b+a^2+b^2-c^2).(2\ a\ b-a^2-b^2+c^2)}{(2\ a\ b)^2}=$$

$$=\frac{[(a+b)^2-c^2].[c^2-(a-b)^2]}{(2\ a\ b)^2}$$

Aplica de nuevo el teorema de la diferencia de los cuadrados:

$$1-\cos^2 C=\frac{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(c+a-b)\,(c-a+b)}{(2\,a\,b)^2}$$

Este segundo miembro se puede expresar en forma más abreviada designando, como antes, con la letra p el semiperímetro del triángulo; halla, en función de p los 4 factores del numerador:

$$a+b+c=2\,p$$
$$a+b-c=(a+b+c)-2\,c=2\,p-2\,c=2\,(p-c)$$
$$c+a-b=2\,(p-b)$$
$$c-a+b=2\,(p-a)$$

Sustituye estos valores en dicho numerador, y simplifica la fracción:

$$1-\cos^2 C=\frac{2\,p.2\,(p-a).2\,(p-b).2\,(p-c)}{4\,(a\,b)^2}=\frac{4\,p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{(a\,b)^2}$$

Sustituye este valor en la fórmula del area, y simplifica:

$$S=\frac{1}{2}a\,b\,\sqrt{\frac{4\,p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{(a\,b)^2}}=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

Como ejercicio, calcula el área de un triángulo cuyos lados miden 4 m., 6 m. y 8 m., y verás que te resulta: $S=\sqrt{135}$ m.^{2} $=11{,}6\ldots$ m.^{2}

Conocida la expresión del área en función de los 3 lados, se puede hallar inmediatamente la expresión del radio del círculo inscrito; hállala:

$$r=\frac{S}{p}=\frac{\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}{\sqrt{p^2}}=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p}}$$

Estas fórmulas del área y del radio son calculables por logaritmos.

En resúmen:

El área S, de un triángulo, en función de los lados a, b, c, viene dada por esta fórmula:

$$S=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

en donde p representa el semiperímetro.

Para demostrar esta fórmula, se expresa primero el área en función de dos lados y del coseno del ángulo que forman, y se obtiene el valor de este coseno deduciéndolo de las fórmulas que dan el cuadrado del lado de un triángulo, transformando el resultado por las reglas de las potencias de exponente dos.

De la fórmula que dá el área se deduce inmediatamente la que dá el radio de la circunferencia inscrita, que es:

$$r = \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

EJERCICIOS

1. Demostrar que en los triángulos, a lados iguales se oponen ángulos iguales, y a mayor lado se opone mayor ángulo; fundándose para ello en el teorema de los senos.

2. Demostrar que la altura de un triángulo equilátero en función del lado es: $l.\frac{\sqrt{3}}{2}$, aplicando el teorema del cuadrado de un lado al cálculo de dicha altura.

3. Demostrar que el área de un triángulo equilátero en función del lado es: $l^2\frac{\sqrt{3}}{4}$, aplicando la fórmula que dá el área de un triángulo en función de los tres lados.

4. Demostrar que el radio del círculo inscrito en un triángulo equilátero es $\frac{1}{3}$ de la altura, o sea: $l.\frac{\sqrt{3}}{6}$, aplicando la fórmula que dá ese radio en función de los lados.

Tema 9.º

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

1. Caso de un lado y dos ángulos.

Suponte que de un triángulo se conocen un lado y dos ángulos, y se quiere calcular los otros tres elementos, o sea el tercer ángulo y los otros dos lados.

Para calcular el tercer ángulo basta recordar que es el suplemento de la suma de los otros dos, y para calcular después los otros dos lados basta recordar que los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

Por ejemplo, suponiendo que se conoce el lado *a* y los ángulos *B* y *C*, deduce la manera de calcular el ángulo A:

$$A+B+C=180^\circ \longrightarrow A=180^\circ-(B+C)$$

y conocido así el ángulo A, deduce la manera de calcular los lados *b* y *c:*

$$\frac{a}{\text{sen A}}=\frac{b}{\text{sen B}}=\frac{c}{\text{sen C}} \longrightarrow b=\frac{a.\text{sen B}}{\text{sen A}} \qquad c=\frac{a.\text{sen C}}{\text{sen A}}$$

Estas fórmulas que dan los lados son calculables por logaritmos; escribe la fórmula que dá el logaritmo de *b:*

$$\log b=\log a+\log \text{sen B}-\log \text{sen A}.$$

En resúmen:

Si de un triángulo se conocen un lado y dos ángulos, se calcula el tercer ángulo recordando que es suplemento de la suma de los otros dos, y se calculan los otros dos lados recordando que los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

2. Caso de dos lados y el ángulo comprendido.

Si de un triángulo se conocen dos lados y el ángulo comprendido, se puede calcular el tercer lado por la fórmula que dá el cuadrado de ese lado. Por ejemplo suponiendo que se conocen los lados *a* y *b* de un triángulo, y el ángulo comprendido, C, escribe la fórmula que puede servir para calcular el tercer lado *c:*

$$c^2=a^2+b^2-2\,a\,b\cos C$$

Esta fórmula tiene el inconveniente de no ser calculable por logaritmos, y además no sirve para calcular los otros dos ángulos A y B.

También puede reducirse el problema a la resolución de dos triángulos rectángulos, sucesivamente.

Para que lo comprendas, traza un triángulo A B C, como el de la figura 18; llama a, b, c los lados respectivamente opuestos; traza la altura B D=h, perpendicular al mayor de los dos lados que se suponen conocidos, tal como el *b,* y llama *n* y *m* los segmentos A D y D C.

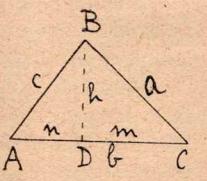

Fig. 18.

Si se conocen los lados *a* y *b* y el ángulo C, resultará, que del triángulo rectángulo B C D conocerás la hipotenusa, *a,* y un ángulo agudo C, con lo cual podrás calcular los catetos; escribe las fórmulas respectivas:

$$h=a.\text{sen C} \qquad m=a.\cos C$$

Esto te permitirá calcular los elementos del otro triángulo rectán-

gulo A D B, y de aquí los elementos del triángulo A B C; escribe la fórmula para calcular A por la cotangente, sustituyendo valores:

$$\text{ctg } A=\frac{n}{h}=\frac{b-m}{h}=\frac{b-a.\cos C}{a.\text{sen } C}=\frac{b}{a \text{ sen } C}-\text{ctg } C$$

Esta fórmula tiene también el inconveniente de no ser calculable por logaritmos, por lo cual, si se utiliza, hay que calcular separadamente el minuendo y el sustraendo, y después restarlos.

Calculado el ángulo A, es inmediato el cálculo del ángulo B, como suplemento de la suma de los otros dos, y el cálculo del tercer lado *c*, por la proporcionalidad de los lados y los senos de los ángulos opuestos; deduce la fórmula correspondiente:

$$\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{c}{\text{sen } C} \longrightarrow c=\frac{a.\text{sen } C}{\text{sen } A}$$

Si se quiere resolver el triángulo por medio de fórmulas calculables por logaritmos, escribe la fórmula que dá la proporcionalidad de los lados conocidos *a* y *b* y de los senos de sus ángulos opuestos; y aplica la propiedad de que un antecedente es a su consecuente como la suma de antecedentes es a la de consecuentes, y como la diferencia de antecedentes, es a la de consecuentes:

$$\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{b}{\text{sen } B}=\frac{a+b}{\text{sen } A+\text{sen } B}=\frac{a-b}{\text{sen } A-\text{sen } B}$$

Ahora puedes fijarte en la proporción que forman las dos últimas razones, y en ella permutas los medios, y aplicas a continuación el teorema que dice «la suma de senos es a su diferencia como la tangente de la semisuma es a la tangente de la semidiferencia» (T. 7.º-3):

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\text{sen } A+\text{sen } B}{\text{sen } A-\text{sen } B}=\frac{\text{tg } \frac{A+B}{2}}{\text{tg } \frac{A-B}{2}}$$

Como se trata de ángulos de un triángulo, la semisuma $\frac{A+B}{2}$ será complemento de $\frac{C}{2}$; dedúcelo:

$$A+B=180^\circ-C \longrightarrow \frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}$$

Y por eso la tangente de $\frac{A+B}{2}$ será igual a la cotangente de su complemento, $\frac{C}{2}$; aplícalo a la fórmula anterior, y te encontrarás con una proporción que sólo tiene un término desconocido, que podrás despejar; hazlo:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\text{ctg } \frac{C}{2}}{\text{tg } \frac{A-B}{2}} \longrightarrow \text{tg } \frac{A-B}{2}=\text{ctg } \frac{C}{2} \times \frac{a-b}{a+b}$$

Esta fórmula, que es calculable por logaritmos, te permitirá hallar la semidiferencia de A y B; y como también conoces la semisuma, porque has visto que es complemento de $\frac{C}{2}$, podrás calcular los ángulos A y B.

Mediante uno de ellos puedes luego calcular *c*, y por tanto resolver por completo el triángulo; escribe ese valor de *c*:

$$c = \frac{a.\text{sen } C}{\text{sen } A}$$

En resúmen:

Cuando en un triángulo se conocen dos lados y el ángulo comprendido, se puede calcular el tercer lado acudiendo a la fórmula que dá el cuadrado de un lado, si bien tiene el inconveniente de no ser calculable por logaritmos.

También puede trazarse una altura, perpendicular a uno de los lados conocidos, y resolver sucesivamente dos triángulos rectángulos. Tampoco son todas las fórmulas que se obtienen, calculables por logaritmos.

Se pueden obtener fórmulas calculables por logaritmos, aplicando la proporcionalidad entre los dos lados conocidos, y los senos de sus ángulos opuestos, y transformando la proporción hasta conseguir una fórmula que permita calcular la semidiferencia entre esos ángulos opuestos, que son desconocidos, fórmula, que en unión de la semisuma, permite calcular los valores de dichos ángulos.

3. Caso de los tres lados.

Si se conocen los tres lados de un triángulo, no puedes resolverlo aplicando solamente las relaciones entre los lados y los senos de sus ángulos opuestos, pues se conocen los tres numeradores, que son *a, b, c*, pero se desconocen los tres denominadores, que son dichos senos.

Lo que puede hacerse es calcular el área del triángulo, o mejor, el radio del círculo inscrito, por medio de las fórmulas que expresan estas cantidades en función de los tres lados (T. 8.°– 6), y por medio de ellos, se pueden calcular luego los ángulos del triángulo. Expresa, por ejemplo, el valor del seno de A, en función del área S, y de dos lados, y después, en función de los tres lados:

$$S = \frac{1}{2} b\, c \,\text{sen } A \longrightarrow \text{sen } A = \frac{2S}{b\,c} = \frac{2\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}{b\,c}$$

Hemos dicho que, mejor que calcular el área es calcular el radio *r*, del círculo inscrito; escribe nuevamente la fórmula que expresa su valor, en función de los tres lados, y aplícale logaritmos:

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p}} \longrightarrow \log r=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log(p-a)+\log(p-b)+\log(p-c)-\log p\right]$$

Para expresar los ángulos en función de este radio, vuelve a dibujar la figura 17, del Tema 8.º, es decir, dibuja un triángulo de lados *a, b, c;* llama A, B, C sus vértices, respectivamente opuestos; traza las tres bisectrices interiores, limitándolas en su punto de concurso, o incentro del triángulo, punto que puedes llamar O; traza las perpendiculares desde O hasta los lados, limitándolas en sus pies, que puedes llamar respectivamente M, N, P, según que estén respectivamente en los lados *a, b, c;* los tres segmentos OM, ON, OP, serán radios del círculo inscrito, y los puntos M, N, P serán los puntos de contacto de la circunferencia inscrita, con los lados del triángulo.

Los segmentos tangentes AN y AP son iguales, y a su longitud común, puedes llamarla *x;* asimismo, la longitud común de BM y BP puedes llamarla *y;* la longitud común de CM y CN puedes llamarla *z*. Para calcular las tres longitudes *x, y, z,* escribe que la suma de cada dos de ellas es igual a un lado, suma las tres igualdades que lo expresan, simplifica el resultado, y de la nueva igualdad resta cada una de las otras tres:

$$\left.\begin{array}{l}x+y=c\\x+z=b\\z+y=a\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}2x+2y+2z=a+b+c=2p\\x+y+z=p\\z=p-c \qquad y=p-b \qquad x=p-a\end{array}\right.$$

El triángulo dado está dividido en seis triángulos rectángulos, que son dos a dos iguales, a saber, los que tienen la hipotenusa común; fijándose en uno cualquiera de estos triángulos rectángulos, por ejemplo en el AOP, o en su igual AON, puedes expresar que la tangente del ángulo cuyo vértice es A, ángulo que vale $\frac{A}{2}$, es igual a la relación entre el cateto opuesto OP=r, y el cateto adyacente AP=x=p−a; exprésalo, y escribe también las otras dos fórmulas análogas:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a} \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b} \qquad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{p-c}$$

Por tanto, dados los tres lados de un triángulo, puedes calcular la mitad de uno cualquiera de sus ángulos, aplicando una de estas fórmulas, que son calculables por logaritmos; aplica logaritmos a la primera:

$$\log \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\log r-\log(p-a)$$

El primer sumando, o sea el log r, puedes calcularlo sin necesidad de hallar el valor de *r,* aplicando solamente la fórmula logarítmica antes hallada, y con ello calcular $\frac{A}{2}$ y por tanto A.

En el caso de que no se disponga de tablas de logaritmos, o no se quieran emplear, y solo se disponga de tablas naturales, puede emplearse directamente la fórmula del cuadrado de un lado, para calcular el coseno de cada uno de los ángulos; escribe por ejemplo, cómo se podría utilizar esa fórmula para calcular el coseno del ángulo A:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A \longrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

Es de advertir que esta fórmula tiene otro inconveniente, además de no ser calculable por logaritmos, y es que el ángulo suele venir mucho mejor determinado por la tangente de su mitad, que por el coseno. En general, siempre que se pueda, debe procurarse determinar los ángulos por su tangente, con preferencia al seno o al coseno.

En resumen:

Cuando se dan los tres lados de un triángulo pueden calcularse los ángulos utilizando las fórmulas del cuadrado de un lado, si bien tienen el inconveniente de no ser calculables por logaritmos, y de dar los ángulos por su coseno.

Es preferible calcular previamente el área, en función de los tres lados, y todavía mejor es calcular el radio del círculo inscrito, y después calcular los tres ángulos por la fórmula siguiente, y sus análogas:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}$$

No es necesario calcular *r,* sino su logaritmo.

Esta fórmula se demuestra descomponiendo el triángulo de lados *a, b, c,* en seis triángulos rectángulos, que tienen por hipotenusas los segmentos que unen el incentro con los vértices; que tienen uno de sus catetos igual al radio *r,* y cuyos otros catetos se pueden calcular fácilmente, hallándose que son p—a, p—b, p—c.

4. Caso de dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Si en un triángulo se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, se puede determinar primeramente el ángulo opuesto al otro

lado conocido, aplicando la proporcionalidad de los lados y los senos de sus ángulos opuestos; con esto podrá determinarse el tercer ángulo, como suplemento de la suma de los otros dos, y por fin se podrá determinar el tercer lado, aplicando también las fórmulas de proporcionalidad. Escribe las fórmulas que pueden utilizarse, en el supuesto de que se conocen los lados *a* y *b*, y el ángulo A, opuesto al lado *a*:

$$\frac{a}{\text{sen A}}=\frac{b}{\text{sen B}} \longrightarrow \text{sen B}=\frac{b.\text{sen A}}{a}$$

$$C=180^\circ-(A+B)$$

$$\frac{c}{\text{sen C}}=\frac{a}{\text{sen A}} \longrightarrow c=\frac{a.\text{sen C}}{\text{sen A}}$$

En este caso hay que hacer una advertencia importante y es que el ángulo B viene determinado por su seno, y ya sabes que puede haber dos ángulos positivos, y menores que 180°, que tengan el mismo seno, si a uno le llamamos B, el otro será B'=180°—B.

Según los casos, el problema puede tener dos soluciones, una o ninguna; es decir, que puede haber dos triángulos desiguales, un solo triángulo, o ninguno que tengan dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, iguales a los datos *a, b, A*.

Por ejemplo, suponte que se quiere resolver un triángulo, con estos datos: $a=\sqrt{2}$ cm. b=2 cm. A=30°.

Conviene primero que construyas el triángulo, para lo cual empieza por trazar un ángulo A de 30°, es decir, mitad del ángulo del triángulo equilátero (fig. 19); toma en uno de sus lados un segmento AC=b=2 cm.; toma después el compás con una abertura igual a $\sqrt{2}$ cm., que será la diagonal de un cuadrado cuyo lado es de un centímetro; y con esa abertura, haces centro en C, y trazas un arco, que cortará al otro lado del ángulo A, en dos puntos, B y B', siendo el B el más alejado del punto A. Uniendo estos puntos con el C tendrás dos triángulos, soluciones del problema, a saber el triángulo ABC y el triángulo AB'C.

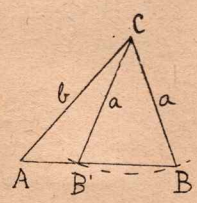

Fig. 19.

Si la circunferencia del centro C y radio *a*, no tuviese mas que un solo punto común con el segundo lado del ángulo A, es decir, con la semirecta AB, de origen A, no habría más que un triángulo solución del problema y si dicha circunferencia no tuviese punto común con dicha semirecta, el problema no tendría solución.

Observando la figura es fácil comprender que si el lado *a*, opuesto al ángulo conocido A, es mayor o igual que el lado *b*, el problema tiene una solución única; y que si el lado *a*, es menor que el lado *b*, el problema tiene dos soluciones, una o ninguna, según que dicho lado

a, sea mayor igual o menor que la distancia del vértice C al otro lado del ángulo A, es decir, a la semirecta AB.

Resuelve trigonométricamente el problema propuesto, dejando indicadas las dos soluciones que tiene, es decir, los dos valores B y B' del ángulo opuesto al lado *b;* los dos valores C y C' del tercer ángulo, y los dos valores *c* y *c'* del tercer lado:

$$\text{sen } B=\frac{2.\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow B=45^\circ \qquad B'=135^\circ$$

$$C=105^\circ \qquad C'=15^\circ \qquad c=\frac{\sqrt{2}.\text{sen } 75^\circ}{\text{sen } 30^\circ} \qquad c'=\frac{\sqrt{2}.\text{sen } 15^\circ}{\text{sen } 30^\circ}$$

Cuando ocurre, como en el ejemplo presente, que el lado *b* es mayor que el lado *a,* puede observarse trigonométricamente si el problema tiene dos soluciones, una o ninguna, viendo si el denominador de la fracción que dá el sen B, es decir, b.sen A, es menor, igual o mayor que el denominador, *a,* es decir, viendo si el valor que resulta para el seno de B es menor, igual o mayor que 1. Y en efecto, dicho numerador b sen A, es precisamente igual a la distancia desde C a la semirecta AB.

En resumen:

Si de un triángulo se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, se puede resolver el triángulo aplicando la proporcionalidad entre los lados y los senos de sus ángulos opuestos, y la fórmula que dá la suma de los ángulos de un triángulo.

Cuando se dán dos lados y el ángulo opuesto al mayor, el problema tiene una solución y una sola. Lo mismo ocurre si los dos lados conocidos son iguales. Pero si se dan dos lados y el ángulo opuesto al menor, el problema puede tener dos soluciones, una o ninguna, según que el lado opuesto al ángulo dado sea mayor, igual o menor que el producto del lado conocido por el seno del ángulo dado.

EJERCICIOS

1. Resolver un triángulo con estos datos:

$$a=1 \text{ cm} \qquad B=60^\circ \qquad A=45^\circ$$

y comprobar los resultados, por razonamiento geométrico.

2. Resolver un triángulo con estos datos:

$$a=1 \text{ cm} \qquad b=\sqrt{5} \text{ cm} \qquad C=120^\circ$$

y comprobar los resultados por razonamiento geométrico.

3. Resolver un triángulo con estos datos:

$$a=60 \text{ cm} \qquad b=80 \text{ cm} \qquad c=100 \text{ cm}$$

y comprobar luego que es rectángulo, viendo que se cumple la relación de Pitágoras.

4. Resolver un triángulo con estos datos:

$$a=948 \text{ m} \qquad b=1250{,}7 \text{ m} \qquad A=12^\circ\ 13'\ 20''$$

comprobando que las dos soluciones que tiene el problema son:

$$B_1=16^\circ\ 13'\ 7'' \qquad B_2=163^\circ\ 46'\ 53''$$

$$C_1=151^\circ\ 33'\ 33'' \qquad C_2=3^\circ\ 59'\ 47''$$

$$c_1=2133 \text{ m} \qquad c_2=312 \text{ m}$$

Tema 10.º

APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA

1. Aplicaciones geométricas.

El nombre *trigonometría,* significa *metría* de los *trígonos,* es decir, medida de los triángulos, pues, según has visto, por medio de ella se pueden calcular los demás elementos de un triángulo cuando se conocen tres de ellos, que determinen el triángulo.

Pero el cálculo de cuadriláteros, el de polígonos en general, y el de muchas figuras poliédricas, se reduce al de triángulos, y de aquí las numerosas aplicaciones geométricas que tiene la Trigonometría.

Por ejemplo, *un paralelogramo* queda determinado cuando se dan dos de sus lados contiguos, y el ángulo que forman. Se puede calcular la diagonal que une los extremos no comunes de los lados conocidos, y los ángulos que esa diagonal forma con los lados, resolviendo el triángulo formado por esa diagonal y esos lados. La otra diagonal se calcula análogamente, calculando previamente los otros ángulos del paralelogramo.

Se puede expresar el área S de ese paralelogramo en función de dos lados contiguos a y b y del ángulo α, que forman; para ello puedes considerar como base el lado a, y la altura h, perpendicular a este

lado, podrás expresarla en función de b y de α; halla así la fórmula que dá S: $S=a.h=a\ b\ \text{sen}\ \alpha$.

Ves que resulta doble que el área del triángulo de la misma base a, y la misma altura h, como debía suceder.

En la práctica, si no se dispone de aparatos para medir ángulos, ni para trazar perpendiculares en el terreno, se puede medir el área del paralelogramo, o de un cuadrilátero cualquiera, midiendo los cuatro lados y una diagonal, y calculando las áreas de los dos triángulos en que ésta lo divide, sin más que aplicar para cada uno la fórmula que expresa el área de un triángulo en función de los tres lados, (Tema 8.º).

Si se tratase de un polígono de más de cuatro lados, se puede también recurrir a la división en triángulos.

Si se trata de un *polígono regular,* puedes calcular el área sin más que conocer el lado l y el número n de lados, pues ya sabes que es igual al producto del semiperímetro: $\frac{n\,l}{2}$ por el apotema, a; como se vé considerando los n triángulos en que se descompone el polígono, al trazar los radios que van a sus vértices. Pero el apotema es cateto de un triángulo rectángulo, cuyo otro cateto es $l/2$ y el ángulo agudo opuesto a este último cateto es $\frac{360^\circ}{2\,n}$, lo que te permitirá expresar el área S_n del polígono regular; exprésala:

$$S_n=\frac{n\,l}{2}\times a=\frac{n\,l^2}{4}.\text{ctg}\,\frac{360^\circ}{2\,n}$$

Otro ejemplo de aplicación de la trigonometría se tiene en la expresión de la *longitud c de una cuerda,* en función del radio r, y de la amplitud α del arco correspondiente; para ello trazas la mediatriz de la cuerda y un radio que vaya a un extremo y se te forma un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es el radio, y un cateto es la semicuerda, expresa el valor de la cuerda:

$$\frac{c}{2}=r.\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\longrightarrow c=2\ r\ \text{sen}\,\frac{\alpha}{2}$$

En fin, como ejemplo de aplicación a la Geometría del Espacio, escribe la fórmula que permite calcular el diedro de un *tetraedro regular,* observando que el rectilíneo correspondiente a ese diedro es ángulo agudo de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son la altura del tetraedro, y una apotema de cara; haz el cálculo de estos catetos en función de la arista l, y por división podrás hallar la tangente del ángulo α del diedro; verás que te resulta:

$$\text{tg}\ \alpha=2.\sqrt{2}\qquad \text{y por tanto}\ \alpha=70^\circ\ 31'\ 43''$$

En resumen:

La Trigonometría tiene numerosas aplicaciones geométricas, pudiendo citarse como ejemplos el cálculo del área

del paralelogramo, y del área del polígono regular, de la longitud de una cuerda, y de la amplitud del diedro de un tetraedro regular.

2. Aplicaciones al cálculo de distancias.

Suponte primero que quieres calcular la distancia desde un punto accesible A, hasta otro punto inaccesible B, que está, por ejemplo, al otro lado de un río que no puedes atravesar (fig. 20).

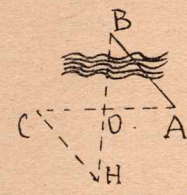

Fig. 20.

Su procedimiento consiste en determinar dos puntos accesibles C y H, que sean extremos de un segmento igual y paralelo a la distancia que se busca. Para ello, traza un segmento AC; por C traza una recta CH, paralela a la AB, es decir, que forme con AC, un ángulo alterno e igual que el ángulo en A, y en esa recta busca un punto H, que esté alineado con el B y con el punto medio O, del segmento AC. Por igualdad de triángulos se ve que el segmento CH es igual al AB, que se quiere medir.

Las operaciones que has hecho sobre el dibujo pueden hacerse sobre el terreno, utilizando instrumentos adecuados.

Otro procedimiento consiste en construir un triángulo rectángulo isósceles ABC (figura 21), que tenga el vértice del ángulo recto en el punto accesible A, otro vértice en el punto inaccesible B, y el otro en un punto C, que se determina de modo que el ángulo ACB valga 45°, lo cual se puede hacer, por ejemplo, con la llamada escuadra de Agrimensor. Será AB=AC.

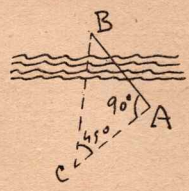

Fig. 21.

Pero el método más preciso consiste en tomar una *base* AC, (fig. 22), es decir un segmento AC, que se mide directamente, o por cálculo, con todo cuidado, y luego con un aparato adecuado, se hace estación en A y en C, y por medio de visuales se miden los ángulos A y C; con esto se tendrá un triángulo ABC del cual se conoce un lado AC y los dos ángulos adyacentes, lo que permitirá calcular otro lado AB; escribe las fórmulas respectivas: $B=180°-(A+C)$

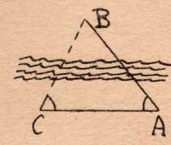

Fig. 22.

$$\frac{AB}{\text{sen } C}=\frac{AC}{\text{sen } B} \longrightarrow AB=AC\times\frac{\text{sen } C}{\text{sen } B}$$

Este método se utiliza incluso para calcular la distancia a los As-

tros, pues midiendo una *base* AC, sobre la Tierra, y dirigiendo visuales desde A y C hasta el astro B, se pueden medir los ángulos A y C, y calcular AB.

Si el astro B, es una estrella fija, la base AC tiene que ser muy grande, a saber, un diámetro de la órbita terrestre; es decir, que los puntos A y C serán dos posiciones del observatorio, en dos momentos separados por un intervalo de seis meses de tiempo. Aun así el ángulo ABC, solo mide algunos segundos, o menos de un segundo, porque la distancia a que se encuentran las estrellas fijas es enorme. La más cercana está a tres y medio años —luz, es decir que la luz, que lleva una velocidad de 300.000 km/segundo, tarda tres años y medio en venir desde esa estrella hasta la Tierra.

Esto indica la grandiosidad del Universo.

En fin, suponte que en segundo lugar se quiere calcular la distancia AB entre dos puntos *inaccesibles* (fig. 23), que están, por ejemplo, al otro lado de un río, o que son cúspides de dos montañas.

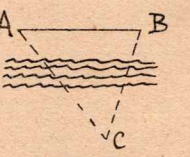

Fig. 23.

Para ello se empieza por calcular la distancia de un punto accesible C, al A, y del C, al B, utilizando cualquier método de los que acabamos de estudiar, y luego, por medio de visuales, se mide el el ángulo ACB, con lo cual, en el triángulo ACB se conocerán 2 lados y el ángulo comprendido, y se podrá calcular el tercer lado AB.

Escribe la fórmula que dá el cuadrado de ese lado:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,AB \times BC.\cos C$$

Si quieres emplear fórmulas calculables por logaritmos, ya sabes, que se calculan primero los ángulos A y B por medio de la tangente de $\frac{A-B}{2}$ y luego se calcula el lado AB, por la fórmula de los senos.

En resumen:

La Trigonometría se puede aplicar para calcular distancias desde un punto accesible y otro inaccesible, o distancias entre puntos inaccesibles, pues en el primer caso se pueden medir un lado, y los ángulos adyacentes de un triángulo, y en segundo caso se pueden conocer dos lados y el ángulo comprendido.

3. Aplicaciones al cálculo de alturas.

Suponte primeramente que se quiere medir una altura AB, *de pie accesible.* Cuando no se dispone de goniómetro, se puede recurrir a la

semejanza de triángulos. Así, en la figura 24 se supone que se quiere medir la distancia AB, para lo cual se hace estación en un punto C, que esté al mismo nivel que el pie de la altura, o sea que el punto A. Se mide la distancia hasta ese pie, o sea la distancia CA; si la altura del instrumento que se usa para medir es CE, esa distancia CA será igual que la distancia desde el punto E hasta la altura, es decir igual que la distancia CH. Midiendo los catetos de un triángulo rectángulo EGF, semejante al EHB, se podrá calcular la distancia AB; escribe las fórmulas respectivas:

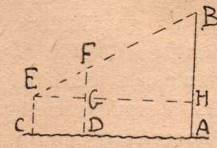

Fig. 24.

$$AB=AH+HB=CE+GF.\frac{EH}{EG}$$

Un aparato cómodo y sencillo para dibujar el triángulo rectángulo EGF es la *plancheta,* como se indica en la figura 25; en el dibujo se pueden tomar luego las medidas de los catetos.

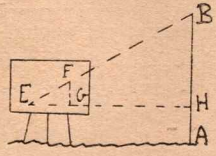

Fig. 25.

También se pueden considerar *dos triángulos semejantes,* teniendo en cuenta la sombra arrojada por la altura que se quiera medir, y la sombra de otro objeto menor, como por ejemplo, un bastón.

En la figura 26 se ven los dos triángulos semejantes, pudiéndose medir los catetos del menor, y también el cateto horizontal del mayor, o sea el cateto BC, que es la longitud de la sombra arrojada por la torre AB, cuya altura tratamos de calcular. Escribe la proporcionalidad entre los catetos de ambos triángulos, y deduce el valor de la altura AB:

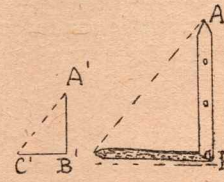

Fig. 26.

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'} \longrightarrow AB=A'B'\times\frac{BC}{B'C'}$$

Si se dispone de un *goniómetro,* o sea, de un aparato para medir ángulos, se puede calcular con precisión uua altura de pie accesible, utilizando la Trigonometría, como se indica en la figura 27, en la cual puedes calcular el cateto HB en función del otro cateto EH y de la tangente del ángulo opuesto al primero; escribe el valor de AB:

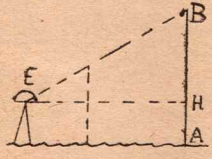

Fig. 27.

$$AB=AH+HB=AH+EH.tg\ HEB.$$

Suponte en segundo lugar que se trata de calcular una altura de *pie inaccesible,* como por ejemplo, la altura de una montaña (fig. 28).

Puedes tomar dos puntos M y N que estén en una línea horizontal,

situada en un plano vertical que pase por la altura BH que se desea calcular. Midiendo la distancia MN y los ángulos en M y N, por medio de visuales dirigidas con un goniómetro, quedará determinado el triángulo MNB, porque conocerás un lado y dos ángulos, lo cual te permitirá calcular el lado MB. Después, en el triángulo rectángulo MBH conocerás la hipotenusa y un ángulo agudo, el M, lo que te permitirá calcular el cateto BH, que deseabas hallar; escribe las fórmulas correspondientes:

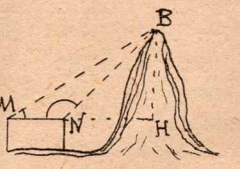

Fig. 28.

$$\frac{MB}{\text{sen } N} = \frac{MN}{\text{sen } B} \longrightarrow MB = MN.\frac{\text{sen } N}{\text{sen } B}$$

$$BH = MB.\text{sen } M$$

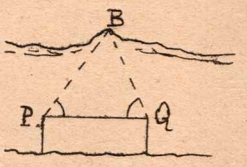

Fig. 29.

También puedes tomar dos puntos cualesquiera P y Q que estén en una recta cualquiera, y midiendo la distancia PQ, (fig. 29), y los ángulos en P y en Q, podrás calcular, PB, y continuar como en el problema anterior.

EJERCICIOS

1. Calcular la diagonal y el área de un paralelogramo, que tiene dos lados contiguos de 10 m. y 20 m., y el ángulo comprendido de 45°.
2. Calcular el área de un decágono regular de 2 cm. de radio.
3. Calcular el diedro básico de una pirámide pentagonal regular cuyas aristas son todas iguales.
4. Efectuar cálculos de distancias y de alturas, prácticamente.

ÍNDICE

Páginas

Tema 1.°

Funciones circulares 3

Tema 2.°

Variación de las funciones circulares 15

Tema 3.°

Tablas trigonométricas 22

Tema 4.°

Ecuaciones trigonométricas 27

Tema 5.°

Resolución de triángulos rectángulos 34

Tema 6.°

Adición y sustracción de ángulos 40

Tema 7.°

Duplicación de ángulos 47

Tema 8.°

Relaciones en los triángulos oblicuángulos 53

Tema 9.°

Resolución de triángulos oblicuángulos 61

Tema 10.°

Aplicaciones de la trigonometría 69

ES PROPIEDAD DEL AUTOR

Los Números Complejos

por

José Oñate Guillén

Catedrático de Matemáticas

VITORIA
Imp., Lib. y Enc. del Montepío Diocesano
San Antonio, 10

PRÓLOGO

ESTE libro sobre los números complejos puede caer en manos de lectores que no conozcan nuestros libros anteriormente publicados, sobre las diferentes clases de números reales. Como el método que seguimos es un método particular del autor, y es continuación del seguido para esos números reales, vamos a resumir lo referente a éstos.

El concepto de relación

El concepto de relación es un concepto lógico, que se debe admitir como concepto primitivo. Como ejemplos de relaciones tenemos: la perpendicularidad de las rectas, la congruencia de segmentos, la igualdad de volúmenes, etc.

Dos rectas de un plano son comparables respecto de la relación de perpendicularidad, y dos segmentos son comparables respecto de la relación de congruencia (superposición); pero ni las rectas ni los segmentos son comparables respecto de la relación de volumen.

En general, *dada una clase de objetos X, se dice que son comparables respecto de una relación dada R, cuando para cada dos objetos arbitrarios de la clase X, se tiene necesariamente una sola de estas dos cosas: que verifican la relación R, o que no la verifican, teniendo sentido tal afirmación o negación.*

La relación de equivalencia

La congruencia de segmentos tiene estas dos propiedades:

Todo segmento es congruente consigo mismo.

Dos segmentos congruentes con un tercero, son congruentes entre sí.

En cambio, la perpendicularidad de rectas no tiene estas propiedades, pues una recta no es perpendicular a sí misma, ni dos rectas perpendiculares a una tercera son perpendiculares entre sí.

En general, *la relación R con la cual se comparan los objetos X, se dirá que es relación de equivalencia, si cumple estas dos propiedades:*

Todo objeto X es equivalente a sí mismo.

Dos objetos X equivalentes a un tercero, lo son entre sí.

Fácilmente se ve que el sistema formado por estas dos propiedades es análogo al formado por las tres propiedades llamadas reflexiva, simétrica y transitiva.

Valores definidos por una relación de equivalencia

Todos los segmentos congruentes con uno dado, tienen un elemento o valor común, que los distingue de los otros segmentos, elemento que se llama *la longitud,* de tal modo que la longitud de un segmento podemos definirla diciendo: *es el elemento común a ese segmento y a todos los que son congruentes con él.*

En general, si los objetos X son comparables respecto de una relación de equivalencia R, todos los objetos equivalentes a uno dado, tienen un elemento común, que los distingue de los demás objetos, elemento que puede llamarse *su valor,* de acuerdo con el significado de la palabra *equivalencia.*

El concepto de número natural

En muchos libros de Aritmética de tipo moderno se es-

tudia el concepto de número natural, fundándolo en la teoría de coordinación de conjuntos.

Dos conjuntos se dicen coordinables cuando entre sus elementos se puede establecer una correspondencia biunívoca; y el valor común a un conjunto finito y a todos los que son coordinables con él, es lo que se llama número natural.

Este modo de establecer el concepto de número natural, viene a ser una definición por equivalencias. Los objetos X son, en este caso, los conjuntos finitos, y la relación de equivalencia R, es la coordinación.

Ahora bien, para establecer los conceptos de las otras clases de números, suele abandonarse ya este procedimiento, y se siguen métodos que, a nuestro juicio, no están exentos de crítica.

Y así, por ejemplo, el número racional se define a veces, como un par de números naturales, y el número complejo, como un par de números reales. Pero entonces, el par de números (2, 3) representa al mismo tiempo al número racional 2/3 y al número complejo 2+3 i, lo que es absurdo.

Nos parece más ventajoso extender a las demás clases de números el método iniciado con los números naturales, como vamos a indicar.

Los números enteros

La primera vez que se precisa ampliar el campo de los números es al tratar de resolver en todos los casos el problema de la sustracción de números naturales, pues las expresiones como ésta: 2—5, carecen de sentido entre estos números. Para darles significado hay que ampliar el campo numérico definiendo los *números enteros,* que comprenden, además de los naturales, los *enteros negativos.*

Para hacer esta ampliación, por el método indicado, consideraremos como objetos X las *diferencias indicadas* de números naturales; y para definir entre ellas una relación de equivalencia, observaremos que en el caso en que las

diferencias indicadas, *a—b* y *m—n,* representan números naturales, la condición necesaria y suficiente para que se verifique la igualdad:

$$a-b=m-n$$

es que se verifique esta otra:

$$a+n=b+m$$

como se ve sumando (b+n) a los dos miembros de la primera.

En el caso general debemos tomar esta propiedad como *definición* de equivalencia, a saber:

Dos diferencias indicadas de números naturales, las llamaremos equivalentes cuando las sumas cruzadas son iguales.

Los valores definidos por esta relación de equivalencia son los números enteros relativos, a saber:

Número entero es el valor común a una diferencia indicada de dos números naturales y a todas sus equivalentes.

Ejemplos:

$$5-2=7-4=3-0=3=+3$$

$$2-5=4-7=0-3=-3$$

Los números racionales

En la división de números enteros se presenta de nuevo la necesidad de ampliar el campo numérico, para dar significado a expresiones como ésta: 12:8.

Los objetos X serán, en este caso, *cocientes indicados* de dos números enteros, y la definición de equivalencia, será análoga a la anterior, a saber:

Dos cocientes indicados de números enteros los llamaremos equivalentes, cuando los productos cruzados son iguales. El valor de un cociente indicado y de todos sus equivalentes, es el número racional.

Ejemplos:

$$(-4):12=4:(-12)=(-1):3=-\frac{1}{3}$$

$$12:4=6:2=3:1=3$$

$$4:12=2:6=1:3=\frac{1}{3}$$

Los números reales

En la radicación de números racionales se presentan dos clases de expresiones que carecen de significado entre esos números; como ejemplos típicos de cada clase se tienen:

$$\sqrt{2} \text{ y } \sqrt{-1}$$

El darles significado numérico exige dos nuevas ampliaciones del campo de los números.

Para hacer la primera ampliación nos fijaremos en el *paso al límite,* que es una operación que también exige ampliar el campo de los números.

Se debe empezar por definir la *función aritmética* a_n de una variable *natural n,* o la función $a_{n,m}$ de dos o más variables naturales. Sus valores no podrán ser, por ahora, más que números racionales, que son los únicos definidos.

Estas funciones, se llaman *infinitésimos cuando acaban por acercarse a cero tanto como se quiera, para valores suficientemente grandes de su variable o variables naturales.*

Ejemplo de infinitésimos de una variable:

$$\frac{1}{n} \qquad \frac{1}{m^2} \qquad \text{etc.}$$

y de dos variables:

$$\frac{1}{m.n} \qquad \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \qquad \text{etc.}$$

Una función a_n *se dice que tiende a un límite* a *cuando la diferencia* $a_n - a$ *es un infinitésimo.*

Más en general, *la función* a_n *se dice que es convergente, cuando la diferencia* $a_n - a_m$ *es un infinitésimo* (de dos variables).

Ejemplo: la función

$$\frac{n+1}{n}$$

es *convergente,* y *tiene por límite 1, pues se tiene:*

$$\frac{n+1}{n} - \frac{m+1}{m} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \text{un inf.}$$

$$\frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n} = \text{un inf.}$$

La función

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad .$$

también se demuestra que es convergente, pero carece de límite entre los números racionales.

Resulta, pues, que si a_n es convergente, la expresión lím a_n que llamaremos *límite indicado*, tiene significado numérico entre los números racionales, en unos casos, y no lo tiene en otros; vamos a ampliar el campo numérico para darle significado en todos los casos, definiendo los *números reales,* que comprenden además de los racionales, los *irracionales* o *inconmensurables.*

Ahora, los objetos X son *límites indicados de funciones convergentes,* funciones cuyos valores son números racionales; y para definir una relación de equivalencia entre aquellos se demuestra que si los límites indicados: *lím* a_n y *lím* b_n son números racionales, la condición necesaria y suficiente para que se verifique la igualdad:

$$\text{lím } a_n = \text{lím } b_n$$

es que se verifique esta otra:

$$a_n - b_n = \text{un inf}$$

En el caso general, deberemos tomar esto como definición de equivalencia, a saber:

Dos límites indicados de variables convergentes los llamaremos equivalentes cuando las variables difieren en un infinitésimo.

Entonces, *los valores definidos por esta relación son los números reales.*

Ejemplos:

$$\text{lím}\frac{n+1}{n} = \text{lím}\frac{n-1}{n} = \text{lím } 0{,}99\overset{\smile}{\ldots\ldots}9 = 1$$

$$\text{lím}\frac{E\left(\sqrt{2 \cdot n^2}\right)}{n} = \text{lím } 1{,}4142\ldots\ldots c_n = \sqrt{2}$$

$$\text{lím}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \text{lím}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \text{lím } 2{,}718\ldots\ldots c_n = e$$

Los números complejos

La segunda ampliación del campo numérico que exige la radicación, conduce a los números *complejos,* que comprenden, además de los reales, los *imaginarios*.

El estudio detallado de los números complejos, constituye el objeto del presente libro.

Los Números Complejos

TEMA 1.°

CONCEPTO DE NÚMERO COMPLEJO

1. Necesidad de ampliar de nuevo el campo numérico.

Escribe las siguientes raices indicadas:

$$\sqrt{4} \qquad \sqrt{3} \qquad \sqrt{-4} \qquad \sqrt[3]{-8}$$

Las dos primeras ya sabes que se leen: *raíz cuadrada aritmética del número 4, y raíz cuadrada aritmética del número 3;* bien que, por abreviar, se diga simplemente: raíz de 4, o raíz de 3. Representan, como ya sabes, el número *positivo,* que elevado al exponente 2, produce el radicando, 4 ó 3. Escribe el valor exacto de la primera, y el valor decimal aproximado en menos de una centésima, de la segunda, indicando con puntos las siguientes cifras decimales:

$$\sqrt{4}=2 \qquad \sqrt{3}=1{,}73\ldots$$

Ya sabes que tanto el número 4 como el 3 tienen otra raíz cuadrada que no es la raíz aritmética, puesto que es negativa, y se designa con el mismo símbolo que la raíz aritmética, pero precedido del signo menos; escríbelas:

$$-\sqrt{4}=-2 \qquad -\sqrt{3}=-1{,}73\ldots=\overline{2},96\ldots$$

Ese número -2 es una de las raices cuadradas de 4, porque se tiene: $(-2)^2=4$.

El número -4 no tiene raices cuadradas en el campo real, porque no existe ningún número real que elevado al cuadrado nos dé 4. Si queremos hacer posible la radicación aun en este caso, tenemos que ampliar de nuevo el campo numérico, definiendo lo que llamaremos *números complejos,* los cuales forman un campo más amplio que el de los números reales, pues comprende a estos números y a otros que llamaremos números *imaginarios.* En el campo de los números com-

plejos veremos que también el número —4 tiene dos raíces cuadradas, y a una de ellas, que la llamaremos *raíz principal,* la designaremos así: $\sqrt{-4}$.

Asimismo, veremos que el símbolo $\sqrt[3]{-8}$ representa la *raíz cúbica principal de —8,* la cual es también *imaginaria,* si bien el número —8, tiene tres raíces cúbicas, siendo una de ellas *real,* a saber: —2.

Con ese símbolo $\sqrt[3]{-8}$ se designa a veces cualquiera de las tres raíces, y en particular la raíz real; pero es preferible reservarlo solamente para la raíz principal, que no es real.

Si recuerdas la significación de las potencias de exponente fraccionario, comprenderás que las cuatro raíces indicadas que hemos considerado se pueden expresar como potencias, cuya base es el radicando, y cuyo exponente es el número inverso del índice de la raíz; exprésalas:

$$\sqrt{4}=4^{1/2} \qquad \sqrt{3}=3^{1/2} \qquad \sqrt{-4}=(-4)^{1/2} \qquad \sqrt[3]{-8}=(-8)^{1/3}$$

Según lo que se acaba de decir, estas cuatro potencias tienen un solo valor cada una, siendo ese valor un número real en las dos primeras, y un número imaginario en la tercera y cuarta.

En general, en el campo de los números reales, la potenciación de exponente no entero, sólo se ha definido para el caso de base *positiva;* si se quiere definir en todo caso hay que ampliar de nuevo el campo numérico.

En resumen:

Una vez definidos y estudiados los números reales, es preciso ampliar nuevamente el campo numérico, si se quiere hacer posible en todos los casos la radicación, y en general la potenciación de base cualquiera.

2. Expresiones complejas.

Todo número real es igual al producto de su módulo por una potencia de —1, cuyo exponente es un número entero. Si el número real es *positivo,* ese exponente será *un número par arbitrario;* y si es *negativo,* será un *número impar arbitrario.* Expresa, por ejemplo, los números 5 y —5 como productos del módulo 5 por potencias de —1:

$$5=5.(-1)^0=5.(-1)^2=5.(-1)^{-2}=5.(-1)^{\dot{2}}=5.(-1)^{2K}$$

$$-5=5.(-1)^1=5.(-1)^3=5.(-1)^{-1}=5.(-1)^{\dot{2}+1}=5.(-1)^{2K+1}$$

A esos productos indicados les llamaremos *expresiones complejas,* y más en general, llamaremos expresión compleja a toda expresión de esta forma: $r.(-1)^h$, en la cual la letra r es un número real

absoluto, llamado *módulo,* es decir, un número real positivo o nulo, y el *exponente* h es un número real cualquiera.

Esas expresiones complejas tienen valor real en unos casos, a saber, cuando el exponente es entero. Y no tiene valor real en otros casos; pero ampliaremos el campo numérico de manera que en el nuevo campo tengan siempre valor numérico.

Cuando estudiemos las operaciones con números complejos, veremos el significado preciso de las leyes del cálculo; entonces comprenderás que a la expresión $\sqrt{4.(-1)}$ y a la expresión $\sqrt[3]{8.(-1)}$, puedes aplicarles la regla conocida para extraer la raíz de un producto; aplicándola, escribe en forma compleja las cuatro raices indicadas que hemos considerado en el párrafo anterior.

$$\sqrt{4}=2.(-1)^0 \qquad \sqrt{3}=\sqrt{3}.(-1)^0$$

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4.(-1)}=\sqrt{4}.\sqrt{-1}=2.(-1)^{1/2}$$

$$\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8.(-1)}=\sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{-1}=2.(-1)^{1/3}$$

Mientras no se conocen más que los números reales, estas últimas igualdades no pueden tener más que un valor simbólico, pero ya verás más adelante que tienen un significado preciso.

Por ahora las anticipamos solamente por vía de ejemplo, para hacer notar la utilidad que pueden tener las expresiones complejas, aun cuando el exponente no sea entero. Por lo dicho se puede preveer que esas dos últimas expresiones complejas, de exponente 1/2 y de exponente 1/3, no pueden tener valor real, sino imaginario, pues representan las raices principales de —4 y de —8, de índices 2 y 3 respectivamente, que son imaginarias, como veremos.

En resumen:

Llamaremos expresión compleja al producto indicado de un número real absoluto, que llamaremos módulo de la expresión, por una potencia de —1, cuyo exponente es un número real cualquiera, que llamaremos exponente de la expresión compleja.

3. Equivalencia de expresiones complejas.

En el párrafo anterior has visto que hay infinitas expresiones complejas que tienen por valor el número 5, y otras infinitas que tienen por valor el número —5.

Las que equivalen al número 5, tienen por módulo 5, y sus exponentes se diferencian unos de otros en un múltiplo de 2. Lo mismo ocurre con las que equivalen al número —5.

En general, se puede demostrar fácilmente que si dos expresiones complejas tienen por exponentes dos *números enteros,* es condición necesaria y suficiente para que las expresiones sean equivalentes, *que sus módulos sean iguales, y que sus exponentes se diferencien en un múltiplo de 2.*

Este teorema lo podemos expresar así:

$$r.(-1)^g = s.(-1)^h \rightleftharpoons \begin{cases} r=s \\ h-g=\dot{2} \end{cases}$$

Con la doble flecha se expresa que de la primera igualdad se deducen las otras dos, y que del sistema formado por estas dos, se deduce la primera, y se lee: *para que la expresión:* $r.(-1)^g$ *sea igual a la expresión:* $s.(-1)^h$ *es condición necesaria y suficiente que sea* $r=s$, *y que sea* $h-g=\dot{2}$.

Decimos que esto se puede *demostrar* en el caso en que *g* y *h* sean números enteros; y en efecto, en tal caso, las dos expresiones serán números reales, y podremos despejar en la primera igualdad el factor *r,* sin más que dividir los dos miembros por el otro factor, obteniéndose en general otra igualdad equivalente a la primera; despéjalo, aplicando la regla que dice que para dividir dos potencias de la misma base, se restan los exponentes:

$$r.(-1)^g = s.(-1)^h \rightleftharpoons r=s.(-1)^{h-g}$$

Ahora bien, exceptuando el caso de módulo nulo, de que enseguida hablaremos, el primer miembro de esta igualdad es un número *r,* real y positivo, y no podrá ser igual al segundo, mas que cuando sea $s=r$ y también $h-g=\dot{2}$.

En el caso trivial de que el módulo *r* sea nulo, ya se comprende que el valor de la primera expresión es 0, cualquiera que sea el exponente entero g; por lo cual, la segunda expresión será equivalente a la primera cuando su módulo sea también nulo, cualquiera que sea su exponente entero *h.*

En el caso general en que *r* y *s* no son nulos, pero *g* y *h* son números reales cualesquiera, que pueden no ser enteros, las expresiones pueden no tener valor real, y no tendrán significado en el campo real las fórmulas anteriores; pero si queremos que en el nuevo campo sigan verificándose las leyes formales del cálculo, será necesario tomar la regla anterior como *definición de equivalencia.*

Y así, por ejemplo, la expresión compleja $2.(-1)^{1/2}$ la tomaremos *por definición* como equivalente a todas las expresiones complejas que tengan por módulo 2, y cuyos exponentes se diferencien de 1/2 en un múltiplo de 2. Con arreglo a esta definición, expresa $\sqrt{-4}$ de varias maneras en forma de expresión compleja:

$$\sqrt{-4}=2.(-1)^{1/2}=2.(-1)^{5/2}=2.(-1)^{1/2+\dot{2}}=2.(-1)^{1/2+2K}$$

Como caso singular, admitiremos, también por definición, que una

expresión compleja tiene valor nulo, solamente cuando su módulo es nulo, y su exponente es un número real cualquiera.

En resúmen:

Dos expresiones complejas, de módulo no nulo, diremos que son equivalentes cuando sus módulos son iguales, y la diferencia entre sus exponentes es un múltiplo de 2.

Todas las expresiones complejas de módulo nulo admitiremos que son equivalentes entre sí, y que no lo son a las expresiones de módulo no nulo.

Estas definiciones se justifican considerando primero el caso de exponentes enteros, en cuyo caso son teoremas que se demuestran muy fácilmente. En el caso de exponentes cualesquiera es necesario tomarlas como definición, si se han de cumplir las leyes del cálculo.

4. Concepto de número complejo.

El valor común a la expresión $5.(-1)^1$, a la expresión $5.(-1)^3$, y a todas las expresiones equivalentes a esas, es un número real, el -5.

En general, una expresión compleja y todas sus equivalentes tendrán común un elemento abstracto, es decir, un valor común, que le llamaremos *número complejo,* el cual será real en unos casos, y no lo será en otros. Por ejemplo, el valor común a la expresión compleja $2.(-1)^{1/2}$ y a todas las que son equivalentes a ella, tales como $2.(-1)^{5/2}$, será un número complejo, que en este caso no es real, como luego verás.

Ese número complejo veremos que es precisamente la raíz cuadrada principal de -4.

Este procedimiento de definir los números complejos comprenderás que es análogo al que puede seguirse para definir, por ejemplo, los números racionales, como valor común al cociente indicado de dos números enteros y a todos sus equivalentes.

En resumen:

Llamaremos número complejo al valor común a una expresión compleja y a todas sus equivalentes.

5. Módulo y exponentes de un número complejo.

Todas las expresiones complejas que son equivalentes entre sí

tienen el mismo módulo, y este módulo se llama también *módulo del número complejo* que es valor común de aquellas expresiones.

Esas expresiones complejas tienen exponentes que se diferencian unos de otros en múltiplos de 2, y esos exponentes los llamaremos también *exponentes del número complejo* que es valor común de aquellas expresiones.

Resulta de aquí que todo número complejo tiene un solo módulo o valor absoluto, que es un número real no negativo, y tiene infinitos exponentes, que son números reales, los cuales se diferencian unos de otros en múltiplos de 2, si el módulo no es nulo.

En el caso particular del número cero, su módulo es cero, y su exponente es cualquier número real.

Entre los infinitos exponentes de un número complejo, hay uno que es mínimo, no negativo, y a ese le llamaremos *exponente principal.*

El módulo de un número complejo se suele designar encerrando el número entre dos barras verticales; halla los módulos de los números complejos 5, -5 y $\sqrt[3]{-8}$, recordando el párrafo 2:

$$|5| = |5.(-1)^0| = 5 \qquad |-5| = |5.(-1)^1| = 5$$

$$|\sqrt[3]{-8}| = |2.(-1)^{1/3}| = 2$$

Escribe los exponentes principales de estos mismos números:

el de 5 es 0 el de (-5) es 1 el de $\sqrt[3]{-8}$ es $\frac{1}{3}$

Escribe la forma general de los infinitos exponentes del número $\sqrt[3]{-8}$

$$\frac{1}{3} + 2 = \frac{1}{3} + 2K.$$

En resumen:

Todo número complejo tiene un módulo o valor absoluto que es el módulo de las expresiones complejas cuyo valor común es aquel número complejo.

Y todo número complejo tiene infinitos exponentes, que se diferencian unos de otros en múltiplos de 2, si el módulo no es nulo; esos exponentes son los de las referidas expresiones complejas.

Entre los infinitos exponentes de un número complejo, llamaremos *exponente principal* al que es mínimo, y no negativo.

6. Clasificación de los números complejos.

De la definición de equivalencia que hemos dado en el párrafo 3, se deduce que si una expresión compleja tiene su exponente no entero, su valor no puede ser real.

Vamos a probar, por ejemplo, que el valor de la expresión compleja $2.(-1)^{1/3}$ no puede ser real.

En efecto, si esa expresión fuese equivalente a un número real, de módulo *s*, podríamos poner este número real como producto indicado de *s* por una potencia de —1 de exponente entero, *h*; y podríamos aplicar la definición de equivalencia; aplícala:

$$2.(-1)^{1/3} = s.(-1)^h \rightleftarrows \begin{cases} 2 = s \\ h - \frac{1}{3} = \dot{2} \end{cases}$$

y esto último no puede ser, porque la diferencia entre un número entero *h*, y un número fraccionario 1/3, no puede ser un entero.

Ya veremos más adelante que el valor de la expresión compleja $2.(-1)^{1/3}$ es precisamente la raíz cúbica principal de —8, que no es real, según hemos indicado anteriormente.

Resulta, pues, que los números complejos pueden ser de dos clases, según que sus exponentes sean enteros, o no lo sean; si son enteros, el número complejo es un número *real*, y si no son enteros, el número complejo no es real, y se llama *imaginario*.

Teniendo en cuenta la clasificación de los números reales, escribe el cuadro de la clasificacion general de los números complejos:

- Números complejos
  - reales
    - racionales
      - enteros
        - positivos
        - nulos
        - negativos
        - (positivos, nulos: naturales)
      - fraccionarios
        - positivos
        - negativos
    - irracionales
      - positivos
      - negativos
  - imaginarios

En resumen:

Los números complejos pueden ser reales o imaginarios, según que sus exponentes sean enteros o no lo sean.

7. Unidad imaginaria.

El número complejo que tiene por módulo 1, y que tiene por ex-

ponente principal 1/2, se llama *unidad imaginaria,* y se designa con la letra *i*. Ya verás más adelante que es la raíz cuadrada principal de —1; exprésalo, poniendo el exponente en varias formas:

$$1.(-1)^{1/2}=1.(-1)^{5/2}=1.(-1)^{1/2+2K}=i=\sqrt{-1}$$

Ya comprendes que la raíz cuadrada de —1, puesta en forma de potencia, tendrá por exponente 1/2. Lo que ocurre es que la unidad imaginaria no puede definirse simplemente como la raíz cuadrada de —1; primero porque no sabemos aún si —1 tiene raices, ya que no hemos estudiado la radicación de números negativos; y segundo, porque, aunque lo admitiéramos, resulta que —1 tiene dos raices, y no sabríamos a cual nos referíamos.

En resumen:

Llamaremos unidad imaginaria al número complejo que tiene por módulo la unidad y por exponente principal 1/2. Esa unidad imaginaria se designa con la letra *i*.

NOTAS

1. Sobre la definición de número complejo.

Los complejos imaginarios, según indica su mismo nombre, se consideraban antiguamente como entes sin existencia real. Todavía, en los tratados de tipo clásico, que se estudian aún en numerosas escuelas, se expone la teoría de los números complejos, de una manera muy poco rigurosa.

Muchos autores modernos definen el número complejo como un par de números reales; definición que es criticada por otros autores, hasta el punto de que en la Lógica Matemática de Burali-Forti se considera, con evidente exageración, como la peor de todas las definiciones.

El método que nosotros seguimos en el estudio de los números complejos lo expusimos por vez primera, en sus fundamentos, en la Revista del Centro de Estudios Científicos, en el número de Junio y Julio de 1934, y otros números sucesivos.

2. Sobre la equivalencia de expresiones complejas.

Se puede demostrar muy fácilmente que la definicion que hemos dado de expresiones complejas equivalentes, expresa una relación que es verdadera relación de equivalencia, porque verifica las tres propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva.

La propiedad reflexiva se demuestra observando que es $h-h=\dot{2}$.
La propiedad simétrica se demuestra observando que:

$$h-k=\dot{2} \longrightarrow k-h=\dot{2}$$

La propiedad transitiva se demuestra observando que:

$$h-k=\dot{2} \quad k-p=\dot{2} \longrightarrow h-p=\dot{2}$$

Esa relación de equivalencia permite definir los números *complejos* en la misma forma que la coordinación de conjuntos finitos permite definir los números *naturales,* método que se puede extender también a la definición de números *enteros,* como valores de diferencias indicadas, a la de números *racionales,* como valores de cocientes indicados, y a la de números *reales,* como valores de límites indicados.

EJERCICIOS

1.° Expresar en forma de expresiones complejas los siguientes números:

$$3 \quad -3 \quad \sqrt{25} \quad \sqrt[3]{-1}$$

2.° Escribir las igualdades que se verifican entre las siguientes expresiones complejas:

$$2.(-1)^5 \quad 3.(-1)^{2/3} \quad 2.(-1)^9 \quad 3.(-1)^{14/3}$$

3.° Decir si son reales o imaginarios los números del problema 1.°

4.° Decir por qué la unidad imaginaria no puede ser igual a un número real.

TEMA 2.°

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

1. Representación de los números reales.

Dibuja una recta indefinida (Figura 1.ª); toma en ella un punto *origen* O; elige un *segmento unidad,* por ejemplo, el cm.; y considera como *positivo* uno de los dos sentidos en que puede ser recorrida la recta, por ejemplo, el sentido de izquierda a derecha, que lo puedes señalar con una flecha, como se indica en la misma figura. Fijados todos esos elementos se tiene lo que se llama un *sistema de abcisas.*

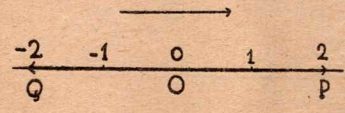

Figura 1.ª

Vas a representar los números reales 2 y —2, para lo cual, toma a la derecha de O un segmento OP de 2 cm., y a la izquierda de O, otro segmento OQ, de 2 cm. de longitud absoluta, pero que tendrá una longitud relativa de —2 cm.

Si el segmento OP se considera recorrido por un punto que va desde el punto origen O hasta el punto extremo P, tendrás lo que se llama un *vector* OP, que se designa $\overrightarrow{OP}$; el número 2 se representa por ese vector, o bien por su extremo P. Asimismo, el número —2 se representa por el vector OQ, o bien por el extremo Q. El número 2 se dice que es la *abcisa* del punto P, y el número —2 es la abcisa del punto Q. En particular, la abcisa del origen O es el número cero.

Ya habrás notado en estudios anteriores que a todo punto de la recta, le corresponde un número real, que es su abcisa; y que a todo número real le corresponde un punto que tiene por abcisa aquel número.

En resumen:

Los números reales se pueden representar por puntos de una recta, en la cual se ha establecido un sistema de abcisas; o bien, por vectores que tienen sus extremos en dichos puntos, y su origen, en el origen de abcisas.

2. Representación de los números complejos.

Escribe una expresión compleja de módulo 2 y de exponente 1/3, cuyo valor es un número complejo, que ya hemos anticipado que se llama raíz cúbica principal de —8; (T. 1.°-2):

$$2.(-1)^{1/3} = \sqrt[3]{-8}$$

Suponte que se quiere representar gráficamente el número complejo que es valor de esta expresión.

Para ello dibuja nuevamente un eje de abcisas, X'X (fig. 2.ª), o sea una recta indefinida en la cual estableces un sistema de abcisas, con su origen O, su unidad de longitud, tal como el cm., y su sentido positivo, tal como el de izquierda a derecha.

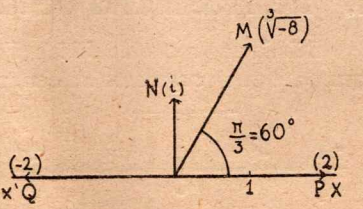

Fig. 2.ª

Si consideramos todos los vectores que parten del origen O, y que están en el plano del dibujo, podremos observar que uno cualquiera de esos vectores queda determinado en cuanto se co-

nozca el número que mide su longitud absoluta, y el ángulo que forma el eje de abcisas con el vector.

Esos dos números, que miden la longitud del vector y dicho ángulo, se llaman las *coordenadas polares* del extremo del vector.

Sobre la medida de ángulos y de arcos de circunferencia debes recordar que *se llama amplitud de un arco la relación entre su longitud y su radio;* escribe la igualdad correspondiente:

$$\text{amplitud de un arco} = \frac{\text{longitud del arco}}{\text{su radio}}$$

Esta razón tiene el mismo valor para todos los arcos que corresponden al mismo ángulo, y se llama también amplitud de ese ángulo, es decir, que podremos llamar *amplitud de un ángulo, a la amplitud de uno cualquiera de sus arcos correspondientes.*

También sabes que las amplitudes de los arcos o ángulos se suelen medir en unidades *sexagesimales* o *centesimales,* pero la unidad natural será el *radiante* que es *la amplitud de un arco cuya longitud es igual al radio.*

Halla, por ejemplo, la medida en unidades naturales, o sea en radiantes, de la amplitud de la semicircunferencia, es decir, de un llano:

$$\text{Amplitud de la semicircunferencia} = \frac{\text{su longitud}}{\text{su radio}} = \frac{\pi . r}{r} = \pi$$

Escribe, según eso, la amplitud de un llano, de un recto, y de un ciclo, en unidades naturales, en sexagesimales, y en centesimales:

$$\text{a. de un llano} = \pi = 180^{\circ} = 200^{g} \qquad \text{a. de un recto} = \frac{\pi}{2} = 90^{0} = 100^{g}$$

$$\text{a. de un ciclo} = 2\,\pi = 360^{0} = 400^{g}$$

En la figura 2.ª, toma el punto P cuya abcisa es 2. El vector OP, y en general, los vectores que parten de O, y tienen su extremo en el semieje OX de abcisas positivas, forman con ese eje de abcisas, un ángulo nulo, o un ángulo de un número par de llanos; pues si a ese vector OP le hacemos girar uno o varios ciclos o vueltas alrededor del origen O, volverá al mismo lugar de partida.

Consideraremos, según es costumbre, como ángulos positivos, los que son descritos en sentido contrario al de las agujas de un reloj.

Escribe la expresión general de todos los ángulos que puede formar un vector OP, situado en el semieje de abcisas positivas, con el mismo eje de abcisas: $2\,K\,\pi = K.360°$.

Ese número K, que es un entero arbitrario, positivo, negativo o nulo, indica el número de ciclos de que se compone el ángulo.

Toma ahora el punto Q. que tiene por abcisa el número —2.

El vector OQ, y en general, todos los vectores que tienen su origen en O, y su extremo en el semieje de abcisas negativas, forman

con el eje de abcisas un ángulo llano, y en general un llano aumentado o disminuído en uno o varios ciclos; escribe la expresión general de esos ángulos: $\pi+2\,K\,\pi=(2\,K+1)\,\pi$.

Dibuja ahora un vector OM, cuya longitud absoluta venga medida por el número 2, y que forme con el eje de abcisas un ángulo de $60°=\frac{\pi}{3}$. Ese ángulo se dice que tiene por lado origen la semirecta OX y por lado extremo la semirecta OM, y si le sumamos o restamos uno o varios ciclos, se obtienen ángulos con el mismo lado origen y el mismo lado extremo; escribe la expresión general de estos ángulos:

$$a.de\ XOM=\frac{\pi}{3}+2\,K\,\pi=60°+K.360°$$

Entre todos los infinitos ángulos XOM llamaremos *principal* al que es mínimo y no negativo, es decir, al que tiene por amplitud $\frac{\pi}{3}$.

Para representar gráficamente un número complejo, consideremos primeramente los números reales como caso particular de los complejos; por ejemplo, expresa en forma compleja los números 2 y —2:

$$2=2.(-1)^0=2.(-1)^{2\,K} \qquad -2=2.(-1)^1=2.(-1)^{2\,K+1}$$

Hemos visto que estos números se representan por vectores cuya longitud absoluta tiene por medida el módulo 2, y se puede observar que el ángulo que cada uno de estos dos vectores forma con el eje de abcisas, *tiene tantos llanos como indica el exponente.* Y así, el vector OP, representante del número 2, forma con el eje de abcisas un ángulo de cero llanos, o en general, de (2 K llanos), pues es su amplitud de $2\,K\,\pi$; y asimismo, el vector OQ, que representa el número —2, forma con el eje de abcisas un ángulo de un llano, o en general de (2 K+1) llanos, pues su amplitud es de $(2\,K+1)\,\pi$.

Esta misma regla podemos aplicar para representar un número complejo cualquiera; y así, el número complejo que es valor de

$$\sqrt[3]{-8}=2.(-1)^{1/3}$$

se representará por un vector, que es el OM, cuya longitud absoluta tiene por medida el módulo 2, y que forma con el eje de abcisas un ángulo formado por tantos llanos como indica el exponente del número complejo, es decir, un ángulo principal de $\frac{1}{3}$ llanos, o en general, un ángulo de $\left(\frac{1}{3}+2\,K\right)$ llanos.

Asimismo, representa la unidad imaginaria $i=1.(-1)^{1/2}$, y verás que viene representada por un vector (ON), cuya longitud es igual a la unidad de medida de longitudes, y que forma con el eje de abcisas un ángulo principal que es un ángulo recto positivo.

En general, el número complejo que es valor de la expresión: $r.(-1)^h$, vendrá representado por un vector cuya longitud absoluta

tiene por medida el módulo *r*, y el ángulo formado por el vector con el eje de abcisas será de *h* llanos.

A ese número complejo se le puede llamar medida del vector, y también el mismo número complejo puede suponerse representado por el extremo del vector, de tal manera que a cada punto del plano le corresponde un número complejo, y a cada número complejo le corresponde un punto del plano.

En resumen:

Para representar geométricamente un número complejo $r.(-1)^h$, basta dibujar un vector tal que su longitud absoluta tenga por medida el módulo *r* del número, y que el ángulo que forme el vector con un eje de abcisas, sea igual a tantos llanos como indique el exponente que se tome para el número complejo, es decir, un ángulo de *h* llanos.

3. Argumentos de un número complejo.

Las amplitudes de los ángulos formados por el eje de abcisas con el vector que representa a un número complejo se llaman *argumentos* de este número complejo, y en particular, la amplitud del ángulo principal se llama *argumento principal.*

Si es *h* uno de los exponentes de un número complejo, ese ángulo tiene *h* llanos, y su amplitud será $h.\pi = h.180°$; por tanto, un argumento de ese número complejo será $h.\pi$, y todos los argumentos vendrán dados por la expresión. $h.\pi + 2\,K\,\pi = h.180° + K.360°$, expresión que podemos llamar argumento general de ese complejo.

Escribe, por ejemplo, los argumentos principales de los números complejos que se indican en los primeros miembros de las igualdades siguientes:

$$\text{el de } 2 = 0 \qquad \text{el de } (-2) = \pi = 180° \qquad \text{el de } \sqrt[3]{-8} = \frac{\pi}{3} = 60°$$

$$\text{el de } i = \frac{\pi}{2} = 90°$$

Sus argumentos generales se obtienen sumando a los argumentos principales: $2\,K\,\pi$ ó $K.360°$; y así el de 2 será $2\,K\,\pi$ ó $K.360°$, y el de *i* será $\pi/2 + 2\,K\,\pi$ ó $90° + K.360°$.

En resumen:

Se llaman argumentos de un número complejo, los productos de sus exponentes por el número π; y en particular, se llama argumento principal, al producto de su exponente principal por el número π.

Los argumentos de un número complejo son iguales a las amplitudes de los ángulos que forma el eje de abcisas con el vector representativo del número complejo. Si llamamos *h* el exponente principal y llamamos α el argumento principal, será: $\alpha = h.\pi$, y el argumento general será $\alpha + 2K\pi$.

4. Unidad compleja.

En el Tema anterior, párrafo 6, hemos definido la unidad imaginaria, llamada *i*, que tiene por módulo 1, y por exponente principal $\frac{1}{2}$, por lo cual tiene por argumento principal $\frac{1}{2}.\pi = \frac{\pi}{2}$.

Vamos a considerar ahora lo que llamaremos *unidad compleja*, que es el número complejo que tiene *por módulo la unidad*, y *por argumento principal la unidad*. Esa unidad compleja la designaremos con la letra **c**.

Halla el exponente principal de **c**, recordando que su argumento 1, es igual a su exponente, *h*, por π:

$$1 = h\,\pi \longrightarrow h = \frac{1}{\pi}$$

Expresa, según eso, el número **c** en forma compleja: $\mathbf{c} = 1.(-1)^{1/\pi}$

Para representar geométricamente la unidad compleja **c**, utilizando un círculo graduado, observa que el ángulo principal formado por el eje de abcisas con el vector representativo de **c**, será de amplitud 1, es decir, de *un radiante;* escribe su valor en grados:

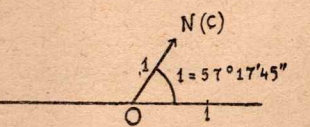

Fig. 3.ª

un radiante $= 180°/\pi = 57°\ 17'\ 45''$

Dibuja un vector ON (fig. 3.ª), que represente la unidad compleja **c**.

En resumen:

Llamaremos unidad compleja al número complejo que tiene por módulo la unidad, y por argumento principal, también la unidad.

La unidad compleja la designaremos por el número **c**; su exponente principal es $\frac{1}{\pi}$, y se representa geométricamente por un vector de longitud igual al segmento unidad, y que forma con el eje de abcisas un ángulo de un radiante; será por tanto:

$$\mathbf{c} = 1.(-1)^{1/\pi}$$

5. Expresión polar de un número complejo.

El módulo y el argumento principal de un número complejo, o en general, el módulo y los argumentos, se llaman, como hemos dicho, *coordenadas polares* del extremo del vector representativo. Por esta razón, toda expresión de un número complejo, en la cual se pongan de manifiesto su módulo y alguno de sus argumentos, se llama *expresión polar*. Generalmente se pone el argumento como subíndice del módulo; y así, una expresión polar de la unidad imaginaria será ésta:

$$i=1_{\pi/2} \text{ y la del número } -2 \text{ será: } -2=2_{\pi}=1_{180^\circ}.$$

Pero esta forma de escribir la expresión polar de un número complejo tiene el inconveniente de que el módulo y el argumento que figuran en ella no están sometidos a operaciones de cálculo, y es preferible que busquemos otra forma, apoyándonos en los conceptos anteriores.

Cuando estudiemos las operaciones con números complejos, veremos que verifican las leyes formales del cálculo; vamos a aplicar algunas anticipadamente para obtener la forma polar que buscamos.

Escribe nuevamente la relación que permite hallar un argumento α cuando se conoce un exponente h, y deduce la que permite hallar h cuando se conoce α:

$$\alpha=h.\pi \longrightarrow h=\frac{\alpha}{\pi}$$

Expresa ahora la unidad compleja **c** en forma de expresión compleja, eleva los dos miembros a un argumento α, y multiplica luego por un módulo r:

$$\mathbf{c}=1.(-1)^{1/\pi} \longrightarrow \mathbf{c}^{\alpha}=1.(-1)^{\alpha/\pi}=1.(-1)^{h} \longrightarrow r.\mathbf{c}^{\alpha}=r.(-1)^{h}$$

Es claro que la potencia $\mathbf{c}^{\alpha}$ carece todavía de significado, mientras no estudiemos la potenciación de complejos, pero las fórmulas anteriores justifican que, *por definición*, se admita que la expresión $r.\mathbf{c}^{\alpha}$ represente el número complejo que tiene por módulo r y por uno de sus argumentos α, es decir, el número complejo que tiene por módulo r y por uno de sus exponentes: $h=\frac{\alpha}{\pi}$.

De acuerdo con esta definición, escribe en forma polar las números complejos 2, -2, i, $\sqrt[3]{-8}$ y **c**:

$$2=2.\mathbf{c}^{0}=2.\mathbf{c}^{2K\pi} \qquad -2=2.\mathbf{c}^{\pi}=2.\mathbf{c}^{(2K+1)\pi} \qquad i=1.\mathbf{c}^{\pi/2}$$

$$\sqrt[3]{-8}=2.\mathbf{c}^{60^\circ} \qquad \mathbf{c}=1.\mathbf{c}^{1}$$

En resumen:

Llamaremos expresión polar de un número complejo a toda expresión de esta forma $r.c^{\alpha}$, en la cual la letra *r* representa el módulo del número complejo; la letra α representa uno cualquiera de sus argumentos, y la letra **c** representa la unidad compleja.

Según eso, si llamamos h al cociente $\frac{\pi}{\alpha}$, que será uno de los exponentes del número complejo, se tendrá por definición:

$$r.c^{\alpha}=r.(-1)^{\alpha/\pi}=r.(-1)^{h}=r.(-1)^{h+2K}=r.c^{\alpha+2K\pi}$$

Esta definición se justifica fácilmente, aplicando las leyes generales del cálculo, a la igualdad que define **c.**

6. Componentes de un número complejo.

Dibuja dos ejes de coordenadas rectangulares, X'X è Y'Y, (figura 4.ª), de origen O. Dibuja un vector OM, que representará un número complejo, cuyo módulo puedes llamar *r,* y a uno de sus argumentos, por ejemplo al principal, puedes llamar α.

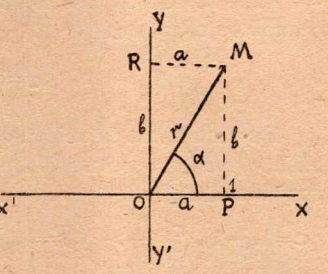

Fig. 4.ª

Proyecta ortogonalmente el vector OM sobre los dos ejes, y obtendrás como proyecciones otros dos vectores, OP y OR, que se llaman componentes del vector OM, según los ejes de coordenadas.

Las longitudes de OP y de OR tendrán por medida, con la unidad que se adopte, dos números reales, *a* y *b,* que serán las coordenadas *x* e *y* del punto M, extremo del vector, OM, coordenadas que se suponen medidas con la misma unidad con que se ha medido *r,* por ejemplo, como el cm.

Ya sabes que estas coordenadas *a* y *b* pueden ser positivas, negativas o nulas, siendo positivas en el caso de la figura, si se admite, como es costumbre, que el sentido positivo del eje de ordenadas, es de abajo hacia arriba.

Estas coordenadas *a* y *b,* que son las medidas de los dos componentes del vector OM, las llamaremos respectivamente primera y segunda componente del número complejo representado por ese vector.

Dicho número complejo convendremos en designarlo así: com (a,b);

expresión que se lee: *complejo a, b.* Escribe la igualdad de esta expresión, con la expresión polar, y con la expresión compleja del mismo número:

$$\text{com}\,(a,b)=r.\mathbf{c}^{\alpha}=r.(-1)^{\alpha/\pi}.$$

Como ejemplo, halla las componentes de los números complejos 2, −2, i:

$$2=2.\mathbf{c}^{0}=\text{com}\,(2,0) \qquad -2=2.\mathbf{c}^{1}=\text{com}\,(-2,0)$$

$$i=1.\mathbf{c}^{\pi/2}=\text{com}\,(0,1)$$

En general, para hallar las componentes de un número complejo cuando se conocen el módulo y uno de sus argumentos, aplicarás la regla que dice que en el triángulo rectángulo OPM de la figura 4.ª, *un cateto es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto al cateto;* o más en general, aplicarás el teorema que da la proyección de un vector sobre el eje, *proyección que es igual al producto del vector que se proyecta por el coseno del ángulo que forma con el eje;* aplicando tales teoremas expresa los valores de *a* y *b* en fnnción de *r* y de α:

$$a=r.\cos\alpha \qquad b=r.\operatorname{sen}\alpha$$

Recordando, por ejemplo, los valores del seno y el coseno de 60° y de 45°, o calculándolos por el teorema de Pitágoras, si no los recuerdas, halla las componentes de los números complejos que son valores de $\sqrt[3]{-8}$ y de $\sqrt[4]{-4}$:

$$\sqrt[3]{-8}=2.\mathbf{c}^{\pi/3}=\text{com}\left(2.\cos\frac{\pi}{3},\,2.\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)=\text{com}\,(2.\cos 60^{\circ},\,2.\operatorname{sen}60^{\circ})=$$

$$=\text{com}\,(1,\sqrt{3})$$

$$\sqrt[4]{-4}=2.\mathbf{c}^{\pi/4}=\text{com}\,(2.\cos 45^{\circ},\,2.\operatorname{sen}45^{\circ})=\text{com}\,(\sqrt{2},\,\sqrt{2})$$

Como nuevo ejemplo, suponte que deseamos hallar las componentes de la unidad compleja **c**. Su módulo es 1, y su argumento principal es 1, es decir, un radiante, cuyo valor en grados ya conoces. Para calcular el seno y el coseno de un radiante, tendrás que utilizar las Tablas trigonométricas, bien las naturales, bien las logarítmicas, auxiliadas éstas de unas tablas de logaritmos; calcula así las primeras cifras de los componentes de **c**.

$$\mathbf{c}=1.\mathbf{c}^{1}=\text{com}\,(\cos 1,\ \operatorname{sen}1)=\text{com}\left(\cos\frac{180^{\circ}}{\pi},\,\operatorname{sen}\frac{180^{\circ}}{\pi}\right)=$$

$$=\text{com}\,(0'5403\ldots,0'8414..)$$

En resumen:

Llamaremos primera componente de un número comple-

jo al producto de su módulo por el coseno de uno cualquiera de sus argumentos, y llamaremos segunda componente, al producto de su módulo por el seno de uno cualquiera de sus argumentos.

Si llamamos a y b las componentes del número $r.c^{\alpha}$, se tendrá por definición:

$$r.c^{\alpha}=\text{com}\,(a,b)=\text{com}\,(r.\cos\alpha\,,\,r.\text{sen}\,\alpha)$$

El nombre de *componentes* de un número complejo es debido a que son iguales a los números reales que miden las componentes coordenadas del vector representativo del número complejo.

7. Cálculo del módulo y los argumentos en función de las componentes.

Cuando se dan las componentes a y b de un número complejo, y se quieren calcular el módulo r, y uno cualquiera de sus argumentos α, basta despejar r y α en las dos ecuaciones que relacionan estas cuatro cantidades. Escribe esas dos relaciones, deduciéndolas de las dos formas de expresar el número complejo:

$$r.c^{\alpha}=\text{com}\,(a,\,b)\longrightarrow\begin{cases}a=r.\cos\alpha\\ b=r.\text{sen}\,\alpha\end{cases}$$

Para despejar r, elevas al cuadrado las dos igualdades y las sumas miembro a miembro, recordando que $\cos^2\alpha+\text{sen}^2\,\alpha=1$; despeja en esa forma:

$$a^2+b^2=r^2.(\cos^2\alpha+\text{sen}^2\,\alpha)=r^2.1=r^2\longrightarrow r=\sqrt{a^2+b^2}$$

No ponemos el doble signo $\pm$ delante de la raíz, porque el módulo r no puede ser negativo. A este mismo resultado se llega inmediatamente observando que el r es la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo OPM de la figura 4.ª, cuyos catetos tienen por medidas a y b.

Para despejar α en función de a y b puedes dividir miembro a miembro la segunda igualdad por la primera; hazlo:

$$\frac{b}{a}=\frac{r.\text{sen}\,\alpha}{r.\cos\alpha}=\text{tg}\,\alpha\longrightarrow\alpha=\text{arc tg}\,\frac{b}{a}$$

Hay que tener en cuenta que así como al calcular la raíz cuadrada de la expresión a^2+b^2 para hallar el módulo r, se desecha el valor negativo de esa raíz, así también al calcular los arcos cuya tangente

es $\frac{b}{a}$ hay que desechar aquellos que no verifican las ecuaciones que dan *a* y *b* en función *r* y de α.

Es decir, que ya sabes por Trigonometría que los ángulos que tienen una tangente dada, están comprendidos en la fórmula general $\alpha+K\pi$, lo cual se ve fácilmente considerando que tanto el ángulo α de la figura 4.ª, como el ángulo $\alpha+\pi$ cuyo lado extremo es la prolongación de MO por el punto O, son ángulos que tienen la misma tangente. Pero de esos infinitos ángulos solo pueden ser argumentos aquellos ángulos α que cumplan también esta condición: $\alpha=\text{arc sen}\frac{b}{r}$ ó esta otra: $\alpha=\text{arc cos}\frac{a}{r}$.

Por ejemplo, supongamos que se quieren hallar el módulo y el argumento principal del complejo que tiene por componentes 3 y 4; es decir, del com (3, 4). El módulo se determina por una raíz cuadrada aritmética; hállalo: $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

El argumento principal, α, podrás determinarlo por el seno, el coseno o la tangente; escribe las tres ecuaciones correspondientes:

$$\alpha=\text{arc sen}\frac{4}{5} \qquad \pi=\text{arc cos}\frac{3}{5} \qquad \alpha=\text{arc tg}\frac{4}{3}$$

Determina, aproximando hasta los minutos, el menor ángulo que que cumple la tercera condición: $\alpha=53°\ 7'...$

Si a este ángulo le sumamos 180°, se obtiene otro 233°7'.. que también tiene por tangente $\frac{4}{3}$, pero no tiene por seno $\frac{4}{5}$, ni por coseno $\frac{3}{5}$.

Escribe dicho complejo en forma polar

$$\text{com}\,(3,4)=5.c^{53°7'..}=5.c^{53°7'..+K.360°}$$

En resumen:

Cuando se da un complejo por sus componentes *a* y *b* se puede determinar el módulo *r*, hallando la raíz cuadrada aritmética de la suma de los cuadrados de esas componentes, es decir, por la fórmula: $r=\sqrt{a^2+b^2}$; cualquier argumento se puede determinar por la fórmula: $\alpha=\text{arc tg}\frac{a}{b}$, pero eligiéndolo de modo que verifique también la condición $\alpha=\text{arc sen}\frac{b}{r}$ ó la condición $\alpha=\text{arc cos}\frac{a}{r}$.

Dos cualesquiera de las tres condiciones, determinan los argumentos del número complejo.

8. Condición de equivalencia de dos expresiones polares.

Para que una expresión polar, $r.c^{\alpha}$ sea equivalente a otra: $s.c^{\beta}$,

es decir, para que ambas representen el mismo número complejo, será condición que sus módulos sean iguales, y que sus argumentos se diferencien en un múltiplo de 2π ; indícalo simbólicamente:

$$r.c^{\alpha}=s.c^{\beta} \rightleftharpoons \begin{cases} r=s \\ \alpha-\beta=2K\pi \end{cases}$$

Pues entonces, y solo entonces, las expresiones complejas correspondientes tendrán el mismo módulo, y sus exponentes se diferenciarán en un múltiplo de 2, por lo cual serán equivalentes (T. 1.º-3).

Geométricamente se vé lo mismo observando que entonces, y sólo entonces, las dos expresiones polares vendrán representadas por el mismo vector.

En resumen:

Para que dos expresiones polares, no nulas, sean equivalentes, es condición necesaria y suficiente que tengan iguales módulos y que la diferencia entre sus argumentos sea un múltiplo de 2π.

Ello se deduce de la condición de equivalencia de expresiones complejas.

EJERCICIOS

1. Representar geométricamente los siguientes números complejos:

$2.(-1)^{1/2}$ $2.(-1)^{3/2}$ $3.(-1)^{1/4}$ $3.(-1)^{2/3}$

2. Expresar en forma polar los complejos del ejercicio anterior.
3. Calcular las componentes de los complejos considerados en el ejercicio 1.
4. Calcular el módulo y el argumento principal de estos complejos:

com (2,3) com (—2, —3)

y representarlos geométricamente.

Tema 3.º

PRIMERAS OPERACIONES CON COMPLEJOS

1. Suma de complejos.

Ya sabrás por Trigonometría que se llama suma o resultante geométrica de dos vectores concurrentes, al vector determinado por la diagonal del paralelogramo construído sobre ellos.

Construye, por ejemplo, dos ejes de coordenadas rectangulares, X'X e Y'Y (fig. 5.ª), y traza dos vectores OM y ON, cuya suma o resultante quieres hallar.

Tendrás que llevar a partir del extremo M del primero, otro vector MP que sea de igual longitud, dirección y sentido que el segundo ON, y entonces el vector OP, será la suma o resultante de los otros dos; escribe la igualdad que lo expresa:

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP}$$

Pero es claro que también puedes llevar a partir del extremo N del segundo, otro vector NP que sea de igual longitud, dirección y sentido que el primero OM, con lo cual resulta que la resultante OP es la diagonal del paralelogramo OMPN formado sobre los vectores dados.

También sabes por trigonometría que la suma algebráica de las proyecciones de varios vectores sobre un eje es igual a la proyección de la resultante sobre ese eje.

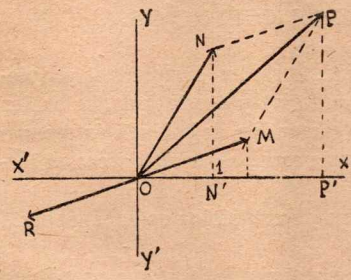

Fig. 5.ª

Y así, en la figura 5.ª puedes proyectar el vector OM sobre el eje de abcisas, y su proyección será OM', y puedes proyectar el vector MP, y su proyección que es M'P', será igual a la proyección ON' del vector ON, con lo cual comprendes que la suma de las proyecciones de OM y de ON sobre el eje de abcisas es OP', que es precisamente la proyección de la resultante OP sobre el mismo eje de abcisas.

Del mismo modo, la suma de las proyecciones de OM y ON sobre el eje de ordenadas, será igual a la proyección de la resultante OP sobre el mismo eje.

Los vectores OM y ON representan dos números complejos, que tienen por componentes las medidas de las proyecciones de aquellos vectores sobre los ejes. Así, llamando *a* y *b* las medidas de las proyecciones de OM, es decir, las medidas de OM' y de M'M, el vector OM representará el com (a,b); llamando *c* y *d* las medidas de las proyecciones de ON, este vector representará el com (c,d); pero entonces las proyecciones del vector resultante OP tendrán por medidas a+c, b+d. El número complejo que tiene estas componentes, es decir el número que representa OP, es lo que llamaremos, *por definición,* suma de aquellos otros dos; escribe la igualdad que lo expresa:

$$\text{com } (a,b) + \text{com } (c,d) = \text{com } (a+c,\ b+d)$$

Como ejemplos, efectúa las sumas indicadas en los primeros miembros de las siguientes igualdades:

$$2+(-5)=\text{com}\,(2,0)+\text{com}\,(-5,0)=\text{com}\,(2+\overline{5},0+0)=\text{com}\,(\overline{3},0)=\overline{3}$$

$$\sqrt[3]{-8}+i=\text{com}\,(1,\sqrt{3})+\text{com}\,(0,1)=\text{com}\,(1+0,\sqrt{3}+1)=\text{com}\,(1,,2'73..)$$

En resumen:

Llamaremos suma de dos números complejos otro número complejo que tiene por primera componente la suma de las primeras componentes de los sumandos, y tiene por segunda componente la suma de las segundas componentes.

La suma se representa geométricamente por la resultante de los vectores que representan a los sumandos.

2. Propiedades de la suma de complejos.

Ya recordarás que la suma de números reales cumple tres propiedades fundamentales, uniforme, conmutativa y asociativa, las cuales se extienden a la suma de más de dos sumandos, definiendo ésta como el número obtenido sumando los dos primeros, el resultado con el tercero, y así sucesivamente.

La propiedad *uniforme* de la suma de complejos es consecuencia inmediata de la definición de suma.

La propiedad *conmutativa* es consecuencia de la misma propiedad aplicada a los números reales. Escribe la deducción que demuestra que la suma $x+y$ de dos números complejos, es igual a la suma $y+x$:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=\text{com}\,(a,b)+\text{com}\,(c,d)=\text{com}\,(a+c,\ b+d) \\ y+x=\text{com}\,(c,d)+\text{com}\,(a,b)=\text{com}\,(c+a,\ d+b) \end{array}\right\} \longrightarrow x+y=y+x$$

Análogamente se demuestra la propiedad *asociativa;* escribe la deducción correspondiente, considerando un tercer complejo

$$z=\text{com}\,(e,f):$$

$$\left.\begin{array}{l} (x+y)+z=\text{com}\,[(a+c)+e,\ (b+d)+f] \\ x+(y+)z=\text{com}\,[a+(c+e),\ b+(d+f)] \end{array}\right\} \longrightarrow (x+y)+z=x+(y+z)$$

Ya sabes que demostradas estas tres propiedades, quedan generalizadas a la suma de más de dos sumandos.

Unicamente debemos advertir que no habiendo definido para los complejos el concepto de mayor y menor, que definíamos para los números reales, no podremos aplicar a la suma de complejos las leyes de *monotonía* que aplicábamos a la suma de números reales.

En resumen:

A la suma de números complejos se aplican las leyes uniforme, conmutativa y asociativa, que después se generalizan, como de costumbre, a la suma de más de dos sumandos.

3. Resta de números complejos.

La definición general de restar se aplica a los números complejos, por lo cual la diferencia será el número que sumado con el sustraendo nos dá el minuendo.

La diferencia se puede hallar *restando las respectivas componentes del minuendo y del sustraendo;* escribe la igualdad que lo expresa:

$$\text{com}\,(a, b)-\text{com}\,(c, d)=\text{com}\,(a-c, b-d)$$

Esta igualdad se demuestra observando que al sumar su segundo miembro con el sustraendo del primero, se obtiene el minuendo de este primero.

Se puede demostrar que la diferencia es *única,* como puedes verlo en las Notas.

Para restar números reales recordarás que se dá la siguiente regla: *se suma el minuendo con el opuesto del sustraendo, es decir, se cambia de signo al sustraendo.* Esta regla es aplicable también a la resta de complejos, sin más que observar que todo número complejo de componentes c y d, tiene un opuesto, cuyas componentes son $-c$ y $-d$, puesto que la suma de los dos complejos es cero; y es claro que al sumar el com (a, b) con el opuesto del com (c, d) se obtiene la diferencia entre el primero y el segundo.

Para interpretar geométricamente la diferencia podemos observar que en la figura 5.ª, la diagonal $\overrightarrow{OP}$ del paralelogramo, es la suma geométrica de sus lados $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$, por lo cual la diferencia geométrica entre dicha diagonal $\overrightarrow{OP}$ y uno de sus lados $\overrightarrow{OM}$ será el otro lado $\overrightarrow{ON}$, según la definición general de restar, aplicada también a la suma geométrica; escribe la igualdad que lo expresa: $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}$.

Esa misma diferencia puedes hallarla también sumando el minuendo $\overrightarrow{OP}$ con el opuesto del sustraendo, es decir con el $\overrightarrow{OR}$, que es de igual longitud, pero de sentido contrario al sustraendo $\overrightarrow{OM}$; haz dicha suma y verás que la diferencia $\overrightarrow{ON}$, que deseas hallar, es efectivamente la diagonal de un paralelogramo cuyos lados son $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OR}$.

En resumen:

La diferencia entre dos números complejos se define como para los números reales. Se puede calcular, *restando las componentes respectivas del minuendo* y *el sustraendo;* o bien, *sumando el minuendo con el opuesto del sustraendo,* es decir, con el complejo cuyas componentes son opuestas de las de este sustraendo. *La representación geométrica de la diferencia* es el vector que es diferencia geométrica entre el vector minuendo y el vector sustraendo; ese vector diferencia se puede hallar construyendo un paralelogramo que tenga por *diagonal el vector minuendo* y como *un lado el vector sustraendo;* y también se puede hallar *sumando el vector minuendo con el opuesto del vector sustraendo,* que es igual a él, pero de sentido contrario.

4. Multiplicación de complejos.

Suponte que se quiere multiplicar un complejo x, cuyo módulo es r, y uno de cuyos argumentos es α, por el complejo y, cuyo módulo es s, y uno de sus argumentos es β.

Para hallar la forma de hacer la multiplicación, escribe las igualdades que definen x e y, y las multiplicas miembro a miembro, aplicando, como si se tratase de números reales, la propiedad asociativa del producto, y la regla para multiplicar potencias de igual base:

$$\left.\begin{array}{l} x = r.c^{\alpha} \\ y = s.c^{\beta} \end{array}\right\} \longrightarrow x.y = (r.s).(c^{\alpha}.c^{\beta}) = (r.s).c^{\alpha+\beta}$$

Este razonamiento nos indica que si se han de cumplir con los números complejos las propiedades del cálculo con números reales, es necesario admitir *por definición* que *el producto de dos complejos se puede hallar multiplicando los módulos y sumando los argumentos.*

Aplica esta definición al cálculo de los productos indicados en los primeros miembros de las siguientes igualdades:

$$2.i = (2.c^{0}).(1.c^{\pi/2}) = 2.c^{\pi/2}$$

$$i.\sqrt[3]{-8} = (1.c^{\pi/2}).(2.c^{\pi/3}) = 2.c^{\pi/2+\pi/3} = 2.c^{5\,\pi/6}$$

En resumen:

Llamaremos producto de dos números complejos a otro número complejo que se puede hallar multiplicando los

módulos y sumando los argumentos. Es decir, que por definición se tendrá:

$$(r.c^{\alpha}).(s.c^{\beta})=(r.s).c^{\alpha+\beta}$$

Esta definición se justifica observando que es necesario admitirla si se han de verificar en el campo complejo las leyes formales del cálculo; pues si al primer miembro de esa igualdad se le aplica la propiedad asociativa del producto y la regla para multiplicar potencias de igual base, demostradas con los números reales, se obtiene el segundo miembro.

5. Método gráfico de multiplicar complejos.

Suponte que queremos calcular el producto: $(r.c^{\alpha}).(s.c^{\beta})$ por método gráfico. Empieza por trazar un eje de abcisas, X' X, (fig. 6.ª), y toma en él un segmento unidad, OA, por ejemplo, de un cm. de longitud. Para fijar las ideas suponte que, por ejemplo, es: r=1,5 α=30° s=2 β=90°.

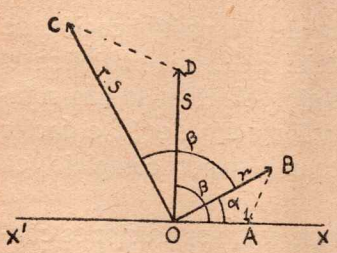

Fig. 6.ª

Traza un vector OB, que represente al primer complejo; tal vector tendrá una longitud que viene medida por el número *r*, y formará con el eje de abcisas un ángulo α.

Ese vector OB debe considerarse como el producto de multiplicar el vector unidad, OA, por el primer complejo, es decir:

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\,(r.c^{\alpha})$$

Tal multiplicación se puede efectuar multiplicando primero por c^{α}, que equivale a verificar una *rotación* de amplitud α, que llevará el vector OA, a tomar la dirección del OB; y después multiplicar por *r*, que equivale a realizar una *dilatación,* según ese factor *r*. Es claro que si el *r* fuese igual a 1, no habría propiamente dilatación, y si fuese menor que 1, habría más bien *contracción,* pero se acostumbra a comprender los tres casos en la palabra dilatación, lo mismo que se sigue llamando multiplicación, cuando el multiplicador es igual o menor que 1.

Ahora debes multiplicar el vector OB, por el segundo complejo, para lo cual lo multiplicas primero por c^{β}, que significa verificar con OB una rotación de amplitud β, y después multiplicas por *s,* que significa efectuar una dilatación según el factor *s*.

El vector OC, que así obtienes, representa el producto de los dos complejos; tiene una longitud medida por (r.s) y forma con el eje de abcisas un ángulo $(\alpha+\beta)$; expresa ese vector OC en función del OB, y luego del OA.

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}.(s.c^{\beta})=\overrightarrow{OA}.(r.c^{\alpha}).(s.c^{\beta})=\overrightarrow{OA}.(r.s).c^{\alpha+\beta}$$

Para efectuar la multiplicación de OB por el segundo complejo, puedes seguir un método gráfico, que consiste en dibujar, además de ese vector OB, otro vector OD, que represente al segundo complejo, es decir, que sea igual al producto del vector unidad, por este segundo complejo; y luego, uniendo A y B, construyes un triángulo ODC que sea semejante al OAB. Y en efecto, la semejanza de los dos triángulos nos dice que OC forma con OA un ángulo $\alpha+\beta$, y luego dá una proporción, de la que deduces la medida de OC; dedúcela:

$$\frac{OC}{OB}=\frac{OD}{OA} \longrightarrow OC=\frac{OB\times OD}{OA} \longrightarrow \text{medida de } OC=\frac{r.s}{1}=r.s$$

En resumen:

Para representar, geométricamente la multiplicación de un complejo, $r.c^{\alpha}$, por otro complejo, $r.c^{\beta}$, se multiplica el vector unidad por el primer complejo, efectuando una rotación de amplitud α, seguida de una dilatación según el factor *r*, y el resultado se multiplica por el segundo complejo, en forma análoga.

Gráficamente se pueden efectuar estas operaciones considerando el triángulo determinado por el vector unidad y el vector que representa al primer complejo, y construyendo un triángulo semejante a ése, sobre el vector que representa al segundo complejo.

6. Primeras leyes formales del producto de complejos.

La definición de producto de complejos que hemos dado en el párrafo 4, era necesario admitirla para la verificación de las leyes del cálculo, en el campo complejo, pero debemos demostrar que no solo es necesaria sino *suficiente,* es decir, que dichas leyes se verifican realmente.

Sobre la ley *uniforme* pueden consultarse las Notas.

Para demostrar la ley conmutativa en el campo complejo, basta apoyarse en la definición de multiplicar de dicho párrafo 4, y en la misma ley conmutativa del producto de números reales.

Escribe la deducción que demuestra que el producto del complejo $x=r.c^{\alpha}$ por el complejo $y=s.c^{\beta}$ es igual al producto y.x, del segundo por el primero:

$$\left.\begin{array}{l} x.y=(r.s).c^{\alpha+\beta} \\ y.x=(s.r).c^{\beta+\alpha} \end{array}\right\} \longrightarrow x.y=y.x$$

Análogamente se deduce la propiedad asociativa; escribe la deducción:

$$\left.\begin{array}{l} (x.y).z=(r.c^{\alpha}.s\ c^{\beta}).t\ c\ \gamma=(r.s).t.c^{(\alpha+\beta)+\gamma} \\ x.(y.z)=r.c^{\alpha}.(s.c^{\beta}.t\ c\ \gamma)=r.(s.t).c^{\alpha+(\beta+\gamma)} \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} (x+y)+z= \\ =x+(y+z) \end{array}$$

Demostradas estas propiedades fundamentales, se generalizan como siempre a los productos de más de dos factores, que se definen también como de costumbre, suponiendo que se multiplican los dos primeros factores, el resultado por el tercero, y así sucesivamente, si hay más factores.

Una advertencia debemos hacer, y es que, como es bien sabido, con los números reales, se verifica otra propiedad llamada *distributiva* que se refiere a la suma y al producto juntamente.

También los números complejos verifican esta propiedad, pero su demostración no es tan fácil como las anteriores, porque la suma de complejos la hemos definido expresando los complejos por sus componentes, y el producto lo hemos definido expresándolos por su módulo y argumentos; por esta razón, debemos todavía estudiar otras formas de expresión de los complejos, que permitan combinar fácilmente operaciones de suma y producto. De ello trataremos en el tema siguiente.

En resumen:

El producto de complejos verifica las tres primeras propiedades formales que verifica el producto de números reales, es decir la propiedad *uniforme,* la *conmutativa* y la *asociativa,* que se extienden fácilmente al producto de más de dos factores.

Para demostrar estas propiedades se aplica la definición de producto de complejos, y las operaciones análogas con los números reales.

NOTAS

1. Sobre la ley uniforme de la resta de complejos.

Se ha demostrado que si se dá un complejo minuendo: com (a, b), y otro sustraendo: com (c, d), existe un tercer complejo, a saber:

com (a−c, b−d), tal que sumado con el sustraendo nos dá el minuendo.

Pero se puede demostrar que todo complejo tal como: com (x, y), que sumado con el sustraendo, nos dé el minuendo, es igual al anterior, pues se tiene:

$$\text{com}\,(x, y)+\text{com}\,(c, d)=\text{com}\,(a, b) \longrightarrow \text{com}\,(x+c, y+d)=$$

$$=\text{com}\,(a, b) \longrightarrow \begin{cases} x+c=a \\ y+d=b \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=a-c \\ y=b-d \end{cases}$$

2. Sobre la ley uniforme del producto de complejos.

La ley uniforme del producto de complejos afirma que el producto de un complejo $x=r.c^{\alpha}$, por otro complejo $y=s.c^{\beta}$ *existe* y es *único,* cualquiera que sean los argumentos que se tomen para determinar los factores.

El producto *existe* porque hay siempre un complejo de módulo *r.s,* y uno de cuyos argumentos es $(\alpha+\beta)$.

Para demostrar que el producto es *único,* podemos suponer que los mismos factores se determinan por otras expresiones polares, de la forma: $x=r.c^{\gamma}$ $y=s.c^{\delta}$, expresiones que deben tener los mismos valores que las anteriores, por lo cual, además de tener los mismos módulos: *r, s,* deberán tener sus argumentos de manera que se diferencien de los anteriores en múltiplos de $2\,\pi$, es decir, que deberá tenerse; $\alpha-\gamma=2\,K\,\pi$ $\beta-\delta=2\,K'\,\pi$. Entonces el nuevo producto, que es $(r.s).c^{\gamma+\delta}$ tiene el mismo valor que el anterior, pues ambos tienen el mismo módulo (r.s) y sus argumentos se diferencian en otro múltiplo de $2\,\pi$ pues tiene:

$$(\alpha+\beta)-(\gamma+\delta)=2\,(K+K')\,\pi$$

EJERCICIOS

1. Calcular las siguientes sumas de complejos, expresando los resultados en la forma: com (a, b):

$$5.(-1)^{1/3}+2.(-1)^{3} \qquad i+\sqrt[3]{-8} \qquad 5.c^{\pi/3}+2.c^{\pi/3}$$

y efectuar las mismas sumas geométricamente.

2. Calcular las siguientes diferencias de complejos, expresando los resultados en la forma com (a, b):

$$\sqrt{-4}-i \qquad 2.c^{\pi/4}-3$$

y efectuar las mismas restas geométricamente.

3. Calcular los siguientes productos de complejos, expresando los resultados en forma polar:

$$[5.(-1)^{1/3}]\times[2\,(-1)^3] \qquad i\times c^{-\pi/4}$$

y efectuar los mismos productos geométricamente.

4. Demuéstrese por procedimiento numérico y gráfico la fórmula $i\times i=-1$.

TEMA 4.°

POTENCIACIÓN NATURAL DE COMPLEJOS

1. Potenciación de complejos expresados en forma polar.

La potenciación por un número natural se define para los números complejos lo mismo que para las otras clases de números, y por tanto, si *m* es un número natural mayor que 1, *la potencia de exponente* m *de un número complejo será un producto de* m *factores iguales a la base; la potencia de exponente 1, será la misma base; y la potencia de exponente cero será el número 1.*

Como ya sabemos multiplicar complejos expresados en forma polar, aplicaremos la definición de multiplicación, según la cual el módulo es el producto de los módulos, y el argumento es la suma de los argumentos, y se deducirá la regla para efectuar la potenciación natural.

Aplícalo al cálculo de la potencia de exponente *m*, de $(r.c^{\alpha})$:

$$(r.c^{\alpha})^m=(r.c^{\alpha}).(r.c^{\alpha})\,.\overset{m}{\smile}.(r.c^{\alpha})=(r.r\,.\overset{m}{\smile}.r).c^{\alpha+\alpha+\,.\overset{m}{\smile}.+\alpha}=$$
$$=r^m.c^{m\,\alpha}$$

Esto nos dice que para elevar un complejo a un exponente *m se eleva el módulo* r *al exponente* m, *y se multiplica el argumento* α *por el mismo exponente* m.

Se recuerda fácilmente la regla suponiendo que al primer miembro se le aplica la regla de potenciar un producto, y después, la regla de elevar una potencia a otro exponente; reglas demostradas anteriormente para los números naturales, y que también se aplicarán a los números complejos, toda vez que la definición de potenciación natural es la misma; aplícalas:

$$(r.c^{\alpha})^m=r^m.(c^{\alpha})^m=r^m.c^{m\,\alpha}$$

En resumen:

La potenciación de un complejo por un número natural, se define lo mismo que la potenciación de números reales.

Como la definición es la misma, las reglas de la potenciación natural, demostradas para los números reales, se aplicarán a los complejos.

Aplicando la definición de multiplicar complejos se deduce este teorema:

Para elevar un número complejo a un exponente, se eleva el módulo, y se multiplica el argumento por ese exponente.

2. Potencias de la unidad imaginaria.

La unidad imaginaria, designada por la letra *i*, ya sabes que tiene por módulo el número 1, y tiene por argumento principal el número $\frac{\pi}{2}$.

Halla su cuadrado:

$$i^2=(1.c^{\pi/2})^2=1^2.(c^{\pi/2})^2=1.c^{\pi}=-1$$

Para hallar las sucesivas potencias, basta multiplicar repetidamente los dos miembros de la igualdad anterior por el número *i;* hálla la 3.ª y 4.ª:

$$i^3=i^2.i=-1.i=-i \qquad i^4=i^3.i=(-i).i=-i^2=-(-1)=1$$

Escribe, según eso, las cinco primeras potencias de *i,* empezando por la de exponente 0:

$$i^0=1 \qquad i^1=i \qquad i^2=-1 \qquad i^3=-i \qquad i^4=1$$

Estos resultados se irán repitiendo periódicamente; calcula las potencias de *i,* desde la cuarta hasta la décima:

$$i^4=1 \quad i^5=i^4.i=1.i=i \quad i^6=i^2=-1 \quad i^7=-i \quad i^8=1 \quad i^9=i \quad i^{10}=-1$$

La interpretación geomética de estos resultados es muy sencilla.

La potencia i^0 se representa por el vector unidad, (fig. 7.ª). La potencia i^1 se obtiene multiplicando el vector anterior por *i,* lo que equivale a una rotación de 90°, obteniéndose el vector que representa la misma *i.* Para obtener el vector que representa la potencia i^2 tendrás que multiplicar el vector anterior por *i,* lo cual equivale a una rotación de 90°, con la cual se obtendrá otro vector unidad, situado en el semieje de abcisas negativas, el cual representa también al número —1. Para obtener i^3 aplicarás a este vector otra rotación de 90°, pues tie-

nes que multiplicarlo por *i*, obteniéndose otro vector unidad, situado en el semieje de ordenadas negativas, vector que es opuesto al que representa *i*, por lo cual el nuevo vector representará $-i$. Para obtener i^4 aplicas a este vector otra rotación de 90°, con lo cual obtienes el vector que representa al número 1. Aplicando a este vector rotaciones sucesivas de 90°, vas obteniendo nuevamente los vectores anteriores, lo que te demuestra que los valores de las potencias se van repitiendo periódicamente.

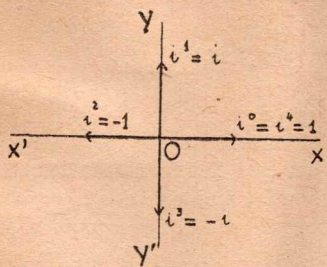

Fig. 7.ª

En resumen:

Las sucesivas potencias naturales de la unidad imaginaria, a partir de la de exponente cero, van tomando valores que se repiten periódicamente, con arreglo a esta sucesión: 1, i, —1, —i, 1, i, —1, —i,... Se demuestra inmediatamente, bien por método aritmético, bien por método geométrico.

3. Producto de un número real por un número complejo.

Suponte que se quiere multiplicar un vector, representante de un complejo, por un número real. El resultado será otro vector, que está situado en la misma recta que el primero y que tendrá el mismo sentido o sentido contrario según que dicho número real sea positivo o negativo; la longitud absoluta del nuevo vector será igual al producto de la longitud del primero, por el módulo del número real.

Esto nos dice que las componentes del nuevo vector son iguales a las componentes del primero multiplicadas por el número real.

Se puede demostrar rigurosamente que para multiplicar un número complejo de componentes *a* y *b*, por un número real, positivo, *m*, o negativo, $-m$, basta multiplicar las componentes *a* y *b*, por dicho número real. Puedes verlo en las Notas.

En resumen:

Para multiplicar un número complejo por un número

real basta multiplicar las componentes del complejo, por ese número real. O sea:

$$m \times com\ (a, b) = com\ (a.m, b.m)$$

4. Números imaginarios puros.

Ya sabes que los números complejos que tienen nula la segunda componente, son números reales, cuyo valor coincide con la primera componente. En cambio, los números complejos que tienen nula la primera componente, sin tener nula la segunda, se llaman *imaginarios puros*. Se representan geométricamente por un vector que está situado en el eje de ordenadas, y esto explica el nombre de imaginarios puros, pues de las dos componentes que tiene todo vector que representa un complejo, es nula en ese caso la componente real, que es la situada en el eje de los números reales, o eje de abcisas.

El número imaginario puro más sencillo es la unidad imaginaria, *i*, pues ya sabes que es: com (0,1)=i.

Multiplica los dos miembros por un número real, *b*, recordando el párrafo anterior:

$$com\ (0.b,\ 1.b) = b.i \longrightarrow com\ (0,\ b) = b.i$$

En resumen:

Se llaman números imaginarios puros los que tienen nula su primera componente, y no nula la segunda. Se representan geométricamente por vectores situados en el eje de ordenadas.

El número imaginario puro más sencillo es la unidad imaginaria, y cualquier otro imaginario puro es igual al producto de su segunda componente por la unidad imaginaria, es decir:

$$com\ (0,\ b) = b.i$$

En efecto, se tiene:

$$com\ (0,\ 1) = i \longrightarrow com\ (0.b,\ 1.b) = b.i \longrightarrow com\ (0,\ b) = b.i$$

5. Expresión binómica de un número complejo.

Efectúa la suma de un número real, *a*, con un imaginario puro, *b i*, poniendo los sumandos en forma compleja y aplicando la definición de sumar complejos:

$$a + b\ i = com\ (a,\ 0) + com\ (0,\ b) = com\ (a+0,\ 0+b) = com\ (a,\ b)$$

Leyendo las igualdades en sentido contrario, nos dicen que todo número complejo de componentes a y b es igual al binomio $a+b\,i$.

Esta forma de expresar un número complejo se llama *forma binómica.*

En resumen:

El com (a, b) es igual al binomio: $a+b\,i$.

Para demostrarlo se expresan el número real a, y el imaginario puro $b\,i$, en forma compleja, y se suman, aplicando la definición de suma de complejos.

6. Expresión trigonométrica de un número complejo.

Ya sabes que las componentes a y b de un número complejo $r.c^{\alpha}$, pueden expresarse fácilmente en función de ese módulo r, y ese argumento α, y sus valores pueden sustituirse en la expresión binómica del número complejo; haz esa sustitución:

$$\left.\begin{array}{l} a=r.\cos\alpha \\ b=r.\operatorname{sen}\alpha \end{array}\right\} \longrightarrow r.c^{\alpha}=\text{com}\,(a,b)=a+b\,i=$$
$$=r.\cos\alpha+i\,r\,\operatorname{sen}\alpha=r.(\cos\alpha+i.\operatorname{sen}\alpha)$$

Esta última expresión se llama expresión trigonométrica, o forma trigonométrica del complejo.

Expresa, por ejemplo, en forma polar, trigonométrica y binómica, los números: 2, -2, i, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[4]{-4}$:

$$2=2.c^{0^\circ}=2\,(\cos 0+i\,\operatorname{sen}0)=2\,(1+i.0)=2+0.i$$

$$-2=2.c^{\pi}=2.(\cos\pi+i\,\operatorname{sen}\pi)=2\,(-1+i.0)=-2+0.i$$

$$i=1.c^{90^\circ}=1.(\cos 90^\circ+i\,\operatorname{sen}90^\circ)=\cos 90^\circ+i\,\operatorname{sen}90^\circ=0+i$$

$$\sqrt[3]{-8}=2.c^{\pi/3}=2.c^{60^\circ}=2.(\cos 60^\circ+i\,\operatorname{sen}60^\circ)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i.\sqrt{3}$$

$$\sqrt[4]{-4}=\sqrt{2}.c^{\pi/4}=\sqrt{2}.c^{45^\circ}=\sqrt{2}.(\cos 45^\circ+i.\operatorname{sen}45^\circ)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i$$

En resumen:

Si es r *el módulo de un número complejo, y es* α *uno de sus argumentos, se tiene:*

$$r.c^{\alpha}=r.(\cos\alpha+i\,\operatorname{sen}\alpha)$$

y este segundo miembro se llama expresión trigonométrica del número complejo.

Para demostrar esa igualdad se pone el número en forma binómica y se sustituyen las componentes por sus valores en función del módulo y el argumento.

7. Producto de complejos en forma binómica.

Para definir la suma de complejos hemos recurrido a las componentes, (T. 3.°-1), y para definir el producto hemos recurrido al módulo y el argumento, (T. 3.°-4). Por esta razón no hemos podido demostrar todavía la *propiedad distributiva,* que se refiere a la suma y al producto conjuntamente.

Si hubiéramos demostrado esta propiedad, podríamos multiplicar el número complejo a+b i, por el complejo c+d i, sin más que aplicar la regla de multiplicar dos sumas indicadas, estudiada para los números reales; aplica tal regla al producto de esos dos números complejos, y sustituye i^2 por -1:

$$(a+b\,i).(c+d\,i)=a\,c+a\,d\,i+b\,c\,i+b\,d\,i^2=(a\,c-b\,d)+(a\,d+b\,c)\,i$$

Como no hemos demostrado todavía la propiedad distributiva de los números complejos, no sabemos aún si esas operaciones son legítimas, y por eso necesitamos demostrar que efectivamente, el primer miembro es igual al último, es decir, hay que demostrar que se verifica realmente la siguiente igualdad:

$$(a+b\,i).(c+d\,i)=(a\,c-b\,d)+(a\,d+b\,c).i$$

Para demostrarlo, se pueden expresar los factores en forma polar; efectuar el producto; expresarlo en forma trigonométrica; aplicar los teoremas de suma de ángulos, y pasar a la forma binómica, como puede verse con detalle en las Notas.

Como ejemplo, efectúa el producto $\sqrt[3]{-8}\times\sqrt[4]{-4}$ expresando los factores en forma binómica:

$$\sqrt[3]{-8}\times\sqrt[4]{-4}=(1+i\sqrt{3})\,(1+i)=(1.1-\sqrt{3}.1)+(1.1+\sqrt{3}.1)\,i=$$
$$=(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})\,i$$

En resumen:

Para multiplicar dos números complejos expresados en forma binómica, se puede aplicar la regla de multiplicación de sumas.

Para demostrarlo se expresan los factores en forma polar, y el producto de estos se expresa en forma trigonométrica y se aplican los teoremas sobre sumas de ángulos.

8. La propiedad distributiva en el campo complejo.

La propiedad distributiva aplicada al campo complejo expresará que el producto de una suma de complejos, tal como:

$$x+y=(a+b\,i)+(c+d\,i)$$

por otro complejo $z=e+f\,i$, se puede efectuar multiplicando cada sumando. Escribe la igualdad que expresa este teorema, empleando primero las letras *x, y, z,* y luego sus valores en forma binómica:

$$(x+y).z=x.z+y.x$$

$$[(a+b\,i)+(c+d\,i)].(e+f\,i)=(a+b\,i).(e+f\,i)+(c+d\,i).(e+f\,i)$$

Para demostrar esta igualdad bastará calcular los valores de cada uno de sus dos miembros y ver que se obtienen resultados iguales.

La suma $x+y$ la puedes calcular recordando la regla de sumar complejos, o sea, sumando las primeras componentes, y después las segundas; haz el cálculo:

$$x+y=(a+b\,i)+(c+d\,i)=(a+c)+(b+d)\,i$$

Esta suma tendrás que multiplicarla por el complejo $z=e+f\,i$, aplicando la regla demostrada en el párrafo anterior; hazlo:

$$(x+y).z=(a+c).e-(b+d).f+[(a+c).f+(b+d).e]\,i$$

Lo mismo se calculará el segundo miembro: $x.z+y.z$; haz todos los cálculos y verás que ambos miembros te dan resultados iguales.

En resumen:

La propiedad distributiva se verifica también en el campo complejo.

Para demostrarla se aplican la definición de suma y la regla de multiplicar números complejos expresados en forma binómica.

9. Fórmula de Moivre.

Hemos demostrado que la potencia de exponente natural, *m,* de un número complejo, $(r.c^{\alpha})$, se puede hallar elevando el módulo al exponente *m,* y multiplicando el argumento por el mismo *m;* exprésalo:

$$(r.c^{\alpha})^m=r^m.c^{m.\alpha}$$

Si el número complejo se expresa en forma trigonométrica, y su potencia efectuada se expresa también de ese modo, se obtiene una fórmula importante que se llama fórmula *de Moivre;* escríbela:

$$[r.(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)]^m=r^m.(\cos m\,\alpha+i\,\text{sen}\,m\,\alpha)$$

En resúmen:

Se llama fórmula de Moivre la igualdad que resulta de aplicar la regla de potenciación de complejos al caso en que la base y la potencia efectuada se expresan en forma trigonométrica.

NOTAS

1. Sobre el producto de un complejo por un número real, positivo o negativo.

Escribe las dos igualdades que expresan el teorema:

$$\text{com (a, b)}\times m = \text{com (a.m, b.m)}$$
$$\text{com (a, b)}\times(-m) = \text{com [a.(—m), b.(—m)]}$$

Para demostrar la primera igualdad llama r el módulo del primer complejo; llama α uno de sus argumentos, y escribe los valores de las componentes de ese primer complejo:

$$a = r.\cos\alpha$$
$$b = r.\operatorname{sen}\alpha$$

Como es $m = m, \mathbf{c}^{0}$, el producto: com (a, b)$\times$m tendrá por módulo r.m y tendrá por argumento $\alpha+0=\alpha$; halla sus componentes:

$$(r.m)\cos\alpha = m.(r.\cos\alpha) = m\ a$$
$$(r.m)\operatorname{sen}\alpha = m.(r.\operatorname{sen}\alpha) = m\ b$$

que es lo que deseábamos demostrar.

Lo mismo se prueba la segunda igualdad, observando que es: $-m = m.\mathbf{c}^{\pi}$, lo que prueba que el producto com (a, b)$\times$(—m) tiene por módulo (r.m) y por argumento $\alpha+\pi$; halla sus componentes:

$$(r.m).\cos(\alpha+\pi) = -(r.m).\cos\alpha = (r.\cos\alpha).(-m) = a.(-m)$$
$$(r.m).\operatorname{sen}(\alpha+\pi) = -(r.m).\operatorname{sen}\alpha = (r.\operatorname{sen}\alpha).(-m) = b.(-m)$$

según queriamos demostrar.

2. Sobre el producto de complejos en forma binómica.

He aquí el cálculo que demuestra que se pueden multiplicar por la regla de multiplicación de binomios:

$$(a+b\,i).(c+d\,i) = (r.\mathbf{c}^{\alpha}).(s.\mathbf{c}^{\beta}) = (r.s).\mathbf{c}^{\alpha+\beta} =$$
$$= (r.s)\,[\cos(\alpha+\beta)+i.\operatorname{sen}(\alpha+\beta)] = (r.s).[(\cos\alpha.\cos\beta -$$
$$-\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta)+i\,(\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\operatorname{sen}\beta)] =$$
$$= (r.\cos\alpha.s.\cos\beta - r.\operatorname{sen}\alpha.s\ \operatorname{sen}\beta)+i\,(r.\operatorname{sen}\alpha.s\cos\beta+r\cos\alpha.s\ \operatorname{sen}\beta) =$$
$$= (a\ c - b\ d)+i\,(a\ d+b\ c)$$

EJERCICIOS

1. Efectuar las operaciones siguientes:

$$(2.c^{45^\circ})^3 \qquad [3\ (\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)]^2$$

2. Expresar en forma polar, en forma trigonométrica, y en forma binómica, los resultados del ejercicio anterior.

3. Efectuar geométricamente las mismas operaciones del problema 1.

4. Hallar el valor de la expresión $(1-i)^2$, aplicando la fórmula que dá el cuadrado de una diferencia, y hallar el mismo cuadrado, expresando $1-i$ en forma polar.

Tema 5.º

POTENCIAS DE EXPONENTE REAL DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

1. Potencia principal de un número complejo.

Sea z un número complejo, cuyo módulo llamaremos r y *cuyo exponente principal,* llamaremos α. Sea h un número real cualquiera, y supongamos que se quiere definir la potencia z^h.

Cuando h es número natural, ya sabemos que esa potencia z^h tiene por valor otro número complejo determinado, cuyo módulo es r^h, y uno de cuyos argumentos es $\alpha.h$.

En el caso general, en que h puede ser un número entero negativo, o bien fraccionario, o todavía irracional, no sabemos aún el significado de la potencia z^h, porque no la hemos definido todavía.

Para ver como la debemos definir, pongamos z en forma polar, tomando por argumento, *el principal,* que hemos llamado α, y apliquemos a esa expresión polar las reglas generales de la potenciación, demostradas para los números reales; aplícalas:

$$z^h = (r.c^{\alpha})^h = r^h . c^{h.\alpha}$$

Este número complejo, que tiene por módulo h, y que tiene como uno de sus argumentos $h.\alpha$, es lo que llamaremos *potencia principal* de exponente h del número z.

Como ejemplos, halla las potencias principales indicadas en los primeros miembros siguientes:

$$(-2)^{1/2}=(2.c^{\pi})^{1/2}=2^{1/2}.c^{\pi/2}=\sqrt{2}.i$$

$$c^{\alpha}=(1.c^{1})^{\alpha}=1^{\alpha}.c^{1.\alpha}=1.c^{\alpha}=1.\cos\alpha+i\,1.\operatorname{sen}\alpha=\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha$$

$$i^{1/3}=(1.c^{\pi/2})^{1/3}=c^{\pi/6}=c^{30^{\circ}}=\cos 30^{\circ}+i\operatorname{sen}30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$(1+i)^{\pi}=(\sqrt{2}.c^{\pi/4})^{\pi}=(\sqrt{2})^{\pi}.c^{\pi^2/4}=.(\sqrt{2})^{\pi}\left(\cos\frac{\pi^2}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi^2}{4}\right)$$

En resumen:

Dado un número complejo z *y un número real* h, *la expresión* z^h *se llama potencia principal de exponente* h *del número* z, *y es, por definición, otro número complejo, cuyo módulo se halla elevando el módulo de* z, *al exponente* h, *y uno de cuyos argumentos se halla multiplicando el argumento principal de* z *por el exponente* h.

Esta definición se justifica llamando *r* al módulo de *z*, llamando α a su argumento principal, y aplicando las propiedades generales de la potenciación, demostradas para los números reales; a saber:

$$z^h=(r.c^{\alpha})^h=r^h.c^{h.\alpha}$$

2. Potencia general de un número complejo.

Sea *z* un número complejo, de módulo *r*, y sea α su argumento principal. Todos los argumentos del número *z* están comprendidos en la forma general $\alpha+2\,K\,\pi$, y se obtienen dando a K valores enteros arbitrarios.

Escribe la expresión polar de *z*, pero poniendo el argumento en forma general:

$$z=r.c^{\alpha+2\,K\,\pi}$$

Podemos elevar el módulo *r* a un exponente real *h*, y podemos multiplicar el argumento general $\alpha+2\,K\,\pi$, por ese mismo exponente *h*, y se obtiene así otra expresión general, que puede representar varios números complejos; a esa expresión se la llama *potencia general* de exponente *h*, del número *z*, y se designa escribiendo *z* entre dos paréntesis iguales; escribe tal potencia general de *z*:

$$((z))^h=((r.c^{\alpha+2\,K\,\pi}))^h=r^h.c^{h.\alpha+h.2\,K\,\pi}$$

Por ejemplo, halla las siguientes potencias generales:

$$((-2))^{1/2}=(2.c^{\pi+2K\pi}))^{1/2}=\sqrt{2}.c^{\pi/2+K\pi}$$

$$((i))^{1/\pi}=((1.c^{\pi/2+2K\pi}))^{1/\pi}=1.c^{1/2+2K}$$

$$((1+i))^3=((\sqrt{2}.c^{\pi/4+2K\pi}))^3=(\sqrt{2})^3.c^{3\pi/4+6K\pi}$$

En el tercer caso, el exponente de la potencia es un número entero, el 3, y puede observarse que la expresión obtenida tiene todos sus valores equivalentes entre sí, pues al dar distintos valores enteros al número K, los argumentos obtenidos difieren unos de otros en múltiplos de 2π, y son argumentos de un solo número complejo, que es el único valor de la potencia; es decir, que en ese caso, y lo mismo ocurre con todos los casos en que *h* es entero, el valor principal de la potencia, coincide con el general; exprésalo para dicho tercer caso:

$$((1+i))^3=(1+i)^3$$

En el primer caso se obtienen dos potencias diferentes, cuyos valores se hallan dando a K el valor 0 y el valor 1; escribe esas dos potencias:

$$\sqrt{2}.c^{\pi/2}=(-2)^{1/2}=\sqrt{2}.i \qquad \sqrt{2}.c^{\pi/2+\pi}=\sqrt{2}.c^{\pi/2}\times c^{\pi}=-\sqrt{2}.i$$

Los demás valores que se pueden dar a K nos dan argumentos que se diferencian de alguno de esos dos en un múltiplo de 2π, y que por tanto corresponden a uno de esos dos números complejos.

Es decir, que el número -2, tiene dos potencias de exponente $1/2$, una es la potencia principal, y otra es el número opuesto a ella.

En el segundo caso, que es el caso del exponente $1/\pi$, se obtienen infinitas potencias, al dar a K infinitos valores; escribe algunas de ellas:

$$1.c^{1/2} \qquad 1.c^{1/2+2} \qquad 1.c^{1/2+4}$$

Vemos, por tanto, que la potenciación de exponente real no es una operación uniforme, en general, pues según que la base se exprese con un argumento o con otro así resulta para potencia de exponente *h* un valor u otro.

Hay un caso en que la potencia es única, es el caso en que el exponente es *entero,* pues entonces los diversos valores que toma la expresión $\alpha.h+h.2K\pi$, difieren unos de otros en múltiplos de 2π y serán argumentos distintos de un mismo número complejo.

En resumen:

Se llama potencia general de exponente real h, *de un número complejo* z, *a la expresión que se obtiene expresando este complejo en forma polar, pero con su argumento general de la forma* $\alpha+2K\pi$, *elevando el módulo al*

exponente h, *y multiplicando ese argumento por* h. Esa potencia general se designa $((z))^h$, y puede tener múltiples valores.

3. Caso de exponente fraccionario.

Suponte que un número complejo z tiene por módulo r y tiene por argumento principal α, y se quiere hallar la potencia general de z, cuyo exponente sea una fracción, irreducible p/q; o dicho de otro modo, se quiere hallar todos los valores distintos que puede tener la expresión: $((z))^{p/q}$.

Escribe por de pronto el módulo común a todos esos valores: $r^{p/q}$.

Unos valores se diferencian de otros por sus argumentos. Escribe la expresión del argumento general, de esa potencia:

$$\frac{\alpha.p}{q}+\frac{K.p}{q}.2\pi$$

Si damos a K los valores enteros desde 0 hasta (q—1), se obtienen q argumentos distintos; indícalos:

$$\frac{\alpha.p}{q} \qquad \frac{\alpha.p}{q}+\frac{p}{q}.2\pi \qquad \frac{\alpha.p}{q}+\frac{2p}{q}.2\pi\ldots \qquad \frac{\alpha.p}{q}+\frac{(q-1).p}{q}.2\pi$$

Como p y q son, por hipótesis, *primos entre si,* estos argumentos no pueden diferenciarse unos de otros en múltiplos de 2π, y por tanto, corresponderán a números complejos diferentes.

En cambio, es fácil ver, que dando a K cualquier otro valor, se obtiene un argumento que se diferencia de alguno de los anteriores en un múltiplo de 2π y que, por tanto, corresponde a un número complejo igual a uno de los anteriores; todo lo cual puedes ver con detalle en las Notas.

En resumen:

Si p/q *es una fracción irreducible y* z *es un complejo no nulo, la potencia general* $((z))^{p/q}$, *tiene* q *valores distintos. Su módulo común se obtiene elevando el módulo de* z *al exponente* p/q; *y un argumento de cada uno de los* q *valores se obtiene dando a* K *los valores enteros de* 0 a (q—1), *en la expresión general del argumento de dicha potencia.*

4. Caso de exponente irracional.

Por un razonamiento análogo, que puedes ver en las Notas, se ve que si el exponente es *irracional,* aunque se den a K infinitos valores

enteros no se obtienen argumentos que difieran en múltiplos de 2π, por lo cual habrá infinitas potencias de z, con el mismo exponente irracional.

En resumen:

Si h *es un número irracional, y* z *es un complejo no nulo, la potencia general* $((z))^h$ *tiene infinitos valores.*

5. Potencias naturales de complejos en forma binomia.

Para hallar potencias naturales de números complejos, puede procederse también expresando estos complejos en forma binomia, y aplicando las reglas que dan el cuadrado o el cubo de un binomio, o en general, la fórmula del binomio de Newton. El resultado puede expresarse enseguida en forma binómica, sustituyendo las potencias de la unidad imaginaria por sus valores (T. 4.°-2).

Halla en esta forma el cuadrado, el cubo y la potencia n-sima de $a+b\,i$:

$$(a+b\,i)^2=a^2+b^2.i^2+2\,a\,b\,i=(a^2-b^2)+2\,a\,b\,i$$

$$(a+b\,i)^3=a^3+3\,a^2b\,i+3\,a\,b^2i^2+b^3i^3=(a^3-3\,a\,b^2)+(3\,a^2b-b^3)\,i$$

$$(a+b\,i)^n=a^n+n\,a^{n-1}\,b\,i+\frac{n\,(n-1)}{2}\,a^{n-2}b^2i^2+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{2.3}\,a^{n-3}$$

$$b^3i^3+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2.3.4}a^{n-4}b^4i^4+\ldots=$$

$$=(a^n-\frac{n\,(n-1)}{2}\,a^{n-2}\,b^2+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2.3.4}\,a^{n-4}\,b^4-\ldots)+$$

$$+(n\,a^{n-1}b-\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{2.3}\,a^{n-3}\,b^3+\ldots)\,i$$

En resumen:

Las potencias naturales de los números complejos pueden hallarse también expresando éstos en forma binomia y aplicando las fórmulas que dan el cuadrado y el cubo de un binomio, o en general, la fórmula del binomio de Newton.

6. Complejos conjugados.

El conjugado del complejo $a+b\,i$ es el complejo $a-b\,i$.

Si el primer complejo se representa por un vector OM, (fig. 8.ª), su conjugado se representará por el vector OM', que es simétrico del OM, respecto del eje de abcisas.

La figura nos indica, y el cálculo demuestra, que los dos complejos tienen igual módulo, y que sus argumentos mínimos en valor absoluto son opuestos. Llamando *r* el módulo del primero, y llamando α su argumento mínimo, en valor absoluto, expresa en forma polar, dicho primer complejo y su conjugado:

$$a+b\,i=r.c^{\alpha} \qquad a-b\,i=r.c^{-\alpha}$$

Efectúa la suma de los dos complejos y su producto:

$$(a+b\,i)+(a-b\,i)=2\,a$$

$$r.c^{\alpha}\times r.c^{-\alpha}=(r.r).c^{\alpha-\alpha}=r^2$$

o bien:

$$(a+b\,i).(a-b\,i)=a^2-(b\,i)^2=$$
$$=a^2-(b^2.-1)=a^2+b^2=r^2$$

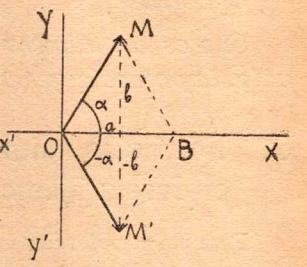

Fig. 8.ª

Esto nos dice que tanto la suma como el producto de dos complejos conjugados son números reales, a saber: la suma es igual al duplo de la primera componente *a*, común a ambos, y el producto es igual al cuadrado del módulo *r*, común a ambos.

Ambos resultados se deducen también gráficamente, pues la suma o resultante de los vectores OM y OM' de la figura 8.ª será la diagonal OB del paralelogramo construido sobre los vectores, diagonal que representa un número real, duplo de la primera componente, *a*. Por otra parte, para multiplicar los complejos geométricamente habrá que efectuar primero con el vector OM una dilatación, multiplicándole por el módulo *r*, que producirá otro vector, cuya longitud tendrá por medida r^2, vector situado en la misma recta OM; y después habrá que efectuar con este vector obtenido, una rotación, de amplitud $-\alpha$, con lo cual se colocará en el eje de abcisas, representando así el número real r^2, que es el valor del producto buscado.

Resta ahora los mismos dos complejos:

$$(a+b\,i)-(a-b\,i)=2\,b\,i$$

Ves que la diferencia es un número imaginario puro.

Hemos visto que los argumentos mínimos en valor absoluto, de dos complejos conjugados, son números opuestos, que podemos llamar α y $-\alpha$; cuya suma es nula. Pero cualquier otro argumento del primer complejo será de la forma $\alpha+2\,K_1\,\pi$, y cualquiera otro del segundo, será de la forma $-\alpha+2\,K_2\,\pi$, y sumándolos obtenemos como suma un múltiplo de $2\,\pi$, a saber: $2\,(K_1+K_2)\,\pi$, múltiplo que puede ser de cualquier orden, tomando como se quiera K_1 y K_2.

Esto nos indica que la condición necesaria y suficiente que deben cumplir dos expresiones polares, para que representen complejos conjugados, es que tengan igual módulo, y que sus argumentos sumen cero, o un múltiplo de $2\,\pi$.

En resumen:

Se dice que dos complejos son conjugados cuando sus primeras componentes son iguales, y sus segundas componentes son opuestas. Se representan por dos vectores simétricos respecto del eje de abcisas.

En su representación polar, los complejos conjugados deben tener igual módulo, y sus argumentos sumarán cero, o un múltiplo de 2π.

La suma de dos complejos conjugados, es real, y es igual al duplo de su primera componente. El producto también es real, y es igual al cuadrado del módulo. La diferencia es imaginario puro.

Todo ello se deduce inmediatamente de la misma definición.

NOTAS

1. Sobre las potencias de exponente fraccionario.

Si z es un complejo, cuyo argumento principal es α, y si p/q es fracción irreducible, la diferencia entre dos valores del exponente de la potencia general $((r))^{p/q}$ será:

$$\left(\frac{p\,\alpha}{q}+\frac{K_1\,p}{q}\,2\pi\right)-\left(\frac{p\,\alpha}{q}+\frac{K_2\,p}{q}.2\pi\right)=\frac{(K_1-K_2)\,p}{q}.2\pi$$

La condición necesaria y suficiente para que esos dos valores del exponente, correspondan a un mismo número complejo, será que el coeficiente de 2π sea entero, es decir:

$$\frac{(K_1-K_2).p}{q}=\text{un entero; o sea: } (K_1-K_2).p=\dot{q}$$

y como p es primo con q, deberá ser, por el teorema de Euclides: $K_1-K_2=\dot{q}$.

Si K_1 y K_2 son dos números de esta sucesión: 0, 1, 2,... (q—1) esa condición no se verifica, luego dicha potencia general de z, *tiene por lo menos* q *valores distintos,* que se pueden obtener dando a K en el exponente general, los q valores de dicha sucesión.

Por otra parte, siendo K_1 un entero cualquiera, al dividirlo por q, dará un resto que será algún número de la misma sucesión, y la diferencia entre K_1 y dicho resto será múltipla de q, lo que prueba que ese valor K_1 y ese resto, originan el mismo valor de la potencia general, y esta potencia, *sólo tendrá* q *valores.*

2. Sobre las potencias de exponente irracional.

Con la misma notación que en el párrafo anterior, si suponemos ahora que *h* es un número *irracional,* la diferencia entre dos valores del exponente de la potencia general: $((z))^h$ será:

$$(\alpha\, h+h.2\ K_1\ \pi)-(\alpha\, h+h.2\ K_2\ \pi)=h.(K_1-K_2).2\ \pi$$

Pero esta diferencia no puede ser nunca múltipla de $2\ \pi$ porque K_1-K_2 es un número entero, y su producto por *h,* que es irracional, será también un número irracional, y no podrá ser nunca entero.

Esto demuestra que dicha potencia general tiene infinitos valores.

EJERCICIOS

1. Dado el número complejo: $z=2.c^{\pi/3}=2\ (\cos 60^\circ+i\ \text{sen}\ 60^\circ)$, calcular, en forma polar y trigonométrica, las siguientes potencias principales:

$$z^3 \qquad z^{3/4} \qquad z^{1/\pi}$$

2. Del mismo complejo z, hállense las siguientes potencias generales, y escribir los tres valores distintos de la primera:

$$((z))^{3/4} \qquad ((z))^{1/\pi}$$

3. Observando que es $z=2.c^{\pi/3}=1+i\sqrt{3}$, calcúlese z^3 por la fórmula del cubo de un binomio, y compruébese que es igual al primer resultado del problema 1.

4. Demuéstrese que la potencia $((z))^{3/4}$ sólo tiene 3 valores, y que la potencia $((z))^{1/\pi}$ tiene infinitos valores.

TEMA 6.°

DIVISIÓN Y RADICACIÓN DE COMPLEJOS

1. División de complejos en forma polar.

Para dividir el complejo $r.c^{\alpha}$ por el complejo $s.c^{\beta}$ puedes aplicar las conocidas reglas del cálculo con números reales; aplícalas:

$$\frac{r.c^{\alpha}}{s.c^{\beta}}=\frac{r}{s}\cdot\frac{c^{\alpha}}{c^{\beta}}=\frac{r}{s}.c^{\alpha-\beta}$$

Se demuestra que el tercer miembro es el cociente de dividir

los dos complejos, multiplicando dicho tercer miembro por el divisor, y viendo que resulta el dividendo; efectúa tal multiplicación:

$$\left(\frac{r}{s}.c^{\alpha-\beta}\right).(s.c^{\beta})=\left(\frac{r}{s}.s\right).c^{\alpha-\beta+\beta}=r.c^{\alpha}$$

Ves, por tanto, que el cociente de dos complejos se puede hallar *dividiendo sus módulos y restando sus argumentos.*

En las Notas puedes ver que ese cociente es *único.*

Como ejemplo, calcula por este método el inverso de la unidad imaginaria:

$$\frac{1}{i}=\frac{1.c^{0}}{1.c^{\pi/2}}=1.c^{-\pi/2}=-i$$

En resumen:

Para dividir dos complejos puestos en forma polar se dividen los módulos y se restan los argumentos.

En efecto, si el complejo así obtenido se multiplica por el divisor, nos dá el dividendo.

2. División de complejos en forma binómica.

Para dividir el complejo $a+b\,i$, por el complejo $m+n\,i$, basta que multipliques los dos términos del cociente indicado por el conjugado del divisor, o sea por $m-n\,i$, pues así conseguirás que el nuevo divisor sea real; haz la operación en esa forma:

$$\frac{a+b\,i}{m+n\,i}=\frac{(a+b\,i)\,(m-n\,i)}{(m+n\,i)\,(m-n\,i)}=\frac{(a\,m+b\,n)+(b\,m-a\,n)\,i}{m^2+n^2}=$$

$$=\frac{a\,m+b\,n}{m^2+n^2}+\frac{b\,m-a\,n}{m^2+n^2}.i$$

Como ejemplo, calcula en esta forma el inverso de la unidad imaginaria:

$$\frac{1}{i}=\frac{1.(-i)}{i.(-i)}=\frac{-i}{-i^2}=\frac{-i}{-(-1)}=\frac{-i}{1}=-i$$

Como ves, lo que se hace en realidad es, *racionalizar los denominadores.*

En resumen:

Para dividir dos complejos puestos en forma binómica, basta multiplicar los dos términos del cociente indicado por el conjugado del divisor, con lo cual se consigue que el nuevo divisor sea real.

3. Raíces cuadradas de un número complejo.

Ya sabes que todo número real y positivo tiene dos raíces cuadradas, las cuales tienen igual valor absoluto, pero son de signos contrarios, llamándose raíz aritmética a la raíz positiva. Si llamamos R al radicando, la raíz aritmética se designa: $\sqrt{R}$ y la otra será: $-\sqrt{R}$.

En cambio, los números negativos no tienen raíz cuadrada en el campo de los números reales, porque no existe número real cuyo cuadrado sea negativo.

Pero en el campo complejo vamos a ver que todo número no nulo, ya sea real y positivo, ya sea real y negativo, o ya sea imaginario, tiene dos raíces cuadradas, porque hay dos números complejos cuyo cuadrado es igual al primero.

Si z es un número complejo cuyo módulo es r y cuyo argumento principal es α, escribe la potencia principal y la potencia general de base z y de exponente $\frac{1}{2}$:

$$z^{1/2}=(r.c^{\alpha})^{1/2}=r^{1/2}.c^{\alpha/2}=\sqrt{r}.c^{\alpha/2}$$

$$((z))^{1/2}=((r.c^{\alpha+2K\pi}))^{1/2}=r^{1/2}.c^{\alpha/2}.c^{K\pi}=\pm\sqrt{r}.c^{\alpha/2}$$

Los dos valores de esta potencia general son dos raíces cuadradas de z, pues elevándolos al cuadrado reproducen el radicando; elévalos:

$$(\sqrt{r}.c^{\alpha/2})^2=(\sqrt{r})^2.(c^{\alpha/2})^2=r.c^{\alpha}=z$$

$$(-\sqrt{r}.c^{\alpha/2})^2=(\sqrt{r}.c^{\alpha/2+\pi})^2=r.c^{\alpha+2\pi}=z$$

Por otra parte puedes ver en las Notas que todo número complejo cuyo cuadrado es igual a z, tiene que ser igual a uno de los dos valores anteriores.

La potencia principal $z^{1/2}$ se llama raíz principal, y se designa $\sqrt{z}$ y la otra se designará $-\sqrt{z}$, y las dos se designan así:

$$\sqrt{((z))},\ \text{o bien:}\ \pm\sqrt{z}$$

Por tanto, la raíz cuadrada general de un número complejo tiene dos valores, que son números opuestos. El valor principal se halla extrayendo la raíz cuadrada aritmética del módulo del radicando, y dividiendo su argumento principal por 2.

Escribe las fórmulas que dan la raíz cuadrada principal de z, y la raíz cuadrada general:

$$\sqrt{z}=\sqrt{r.c^{\alpha}}=\sqrt{r}.c^{\alpha/2} \qquad \sqrt{((z))}=\pm\sqrt{r}.c^{\alpha/2}$$

Como ejemplos, calcula las raices cuadradas del número -1, del número -4 y del número $1+i$.

$$\sqrt{-1}=\sqrt{1.c^{\pi}}=\sqrt{1}.c^{\pi/2}=i \qquad \sqrt{((-1))}=\pm i$$

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4.c^{\pi}}=\sqrt{4}.c^{\pi/2}=2\,i \qquad \sqrt{((-4))}=\pm 2\,i$$

$$\sqrt{1+i}=\sqrt{\sqrt{2}.c^{\pi/4}}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{45^\circ}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{45^\circ}{2}\right)$$

4. Raices de índice *h* de un número complejo.

Así como todo número complejo no nulo tiene dos raices cuadradas, también tiene tantas raices de índice *h* como unidades tiene este índice. Es decir, que tendrá 3 raices cúbicas, 4 raices cuartas, etc.

Las raices de índice *h* de un complejo z son los valores de la potencia general de base z y de exponente $\frac{1}{h}$, lo cual se demuestra elevando esos valores al exponente *h* y viendo que reproducen el radicando z.

Recordando el Tema anterior se comprenderá que la raíz principal, que se designa: $\sqrt[h]{z}$, y que es igual a la potencia principal $z^{1/h}$, se hallará extrayendo la raíz aritmética del módulo, y dividiendo el argumento principal por *h*. Llamando *r* el módulo de z y llamando α su argumento principal, escribe las fórmulas que dan la raíz principal de índice *h*, del número z, y la raíz general:

$$\sqrt[h]{z}=\sqrt[h]{r.c^{\alpha}}=(r.c^{\alpha})^{1/h}=\sqrt[h]{r}.c^{\alpha/h}$$

$$\sqrt[h]{((z))}=\sqrt[h]{((r.c^{\alpha+2K\pi}))}=\sqrt[h]{r}.c^{\alpha/h+2K\pi/h}$$

Ya has visto en el Tema anterior que al dar a K sucesivos valores, se obtienen para esta última expresión, *h* valores distintos, cada uno de los cuales es una raíz de z, pues elevado al exponente *h* nos da z. Halla por ejemplo, la raíz cúbica principal del número -8, y después la raíz cúbica general:

$$\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8.c^{\pi}}=2.c^{\pi/3}=2.(\cos 60^\circ+i\,\mathrm{sen}\,60^\circ)=1+i\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{((-8))}=\sqrt[3]{((8.c^{\pi+2K\pi}))}=2.[\cos(60^\circ+K.120^\circ)+i.\mathrm{sen}\,(60^\circ+K.120^\circ)]$$

Escribe las dos raices cúbicas no principales de -8, para lo cual bastará que des a K los valores 1 y 2:

$2.(\cos 180^\circ+i\,\mathrm{sen}\,180^\circ)=-2$ $\qquad$ $2.(\cos 300^\circ+i\,\mathrm{sen}\,300^\circ)=1-i\sqrt{3}$

Ves que una de las tres raíces de -8 es real, y vale -2, cuyo valor se designa algunas veces así: $\sqrt[3]{-8}$, aunque es preferible reservar esta notación para la raíz principal, que es imaginaria, es decir, para la raíz: $1+i\sqrt{3}$, como hemos visto antes.

En resumen:

Todo número complejo tiene h *raíces de índice* h, *que son los* h *valores de la potencia cuya base es aquel número y cuyo exponente es 1/h.*

El módulo, que es común a todas las raíces, es igual a la raíz aritmética del módulo del radicando, y el argumento de la raíz general se halla dividiendo por *h* el argumento general del radicando.

En particular, si en el radicando z se toma el argumento principal, se obtiene la raíz principal, que se designa $\sqrt[h]{z}$ y que será igual a la potencia principal $z^{1/h}$.

5. Raíces de la unidad.

Escribe el número 1 en forma polar, tomando primero por argumento, el principal, y luego el general:

$$1=1.c^{o}=1.c^{2K\pi}$$

Halla sus raíces de índice *h*; primero la principal, y luego la general:

$$\sqrt[h]{1}=1 \qquad \sqrt[h]{((1))}=c^{2K\pi/h}=\cos\frac{2K\pi}{h}+i\,\text{sen}\,\frac{2K\pi}{h}$$

Ya sabes que esta expresión tiene *h* valores distintos, que se pueden obtener dando a K los sucesivos valores: 0, 1, 2, 3,... (h-1).

Halla, por ejemplo, las raíces cuadradas, cúbicas y cuartas, del número 1:

$$\sqrt{((1))}=c^{K\pi}=\pm 1$$

$$\sqrt[3]{((1))}=c^{2K\pi/3}=1, \text{ o bien } -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i, \text{ o bien } -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

$$\sqrt[4]{((1))}=c^{2K\pi/4}=\pm 1, \text{ o bien } \pm i$$

Estas raíces se representan geométricamente por vectores cuya longitud es igual a la unidad de longitudes. Representa dichas raíces,

y verás que las dos raíces cuadradas vienen representadas por dos vectores como los OA y OC de la fig. 9.ª; las tres raíces cúbicas, por los vectores OA, OE, OF; y las cuatro raíces cuartas por los vectores cuyos extremos son A, B, C, D.

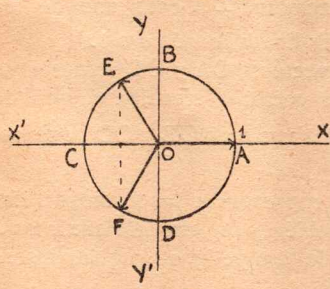

Fig. 9.ª

Ya comprendes que todos los extremos de los vectores están en la circunferencia cuyo radio es la unidad de longitud, y de tal manera que los extremos de los vectores que representan las raíces cuadradas, cúbicas, cuartas, etc., dividen a la circunferencia respectivamente en dos, en tres, en cuatro, etc. partes iguales. Y así, por ejemplo, uniendo sucesivamente los puntos A, E, F, resulta un triángulo equilátero, inscrito en la circunferencia; uniendo los A, B, C, D, resulta un cuadrado inscrito. etc.

En resumen:

Las raíces de índice *h* de la unidad son los *h* valores distintos de la expresión:

$$c^{2K\pi/h} = \cos\frac{2K\pi}{h} + i\,\mathrm{sen}\frac{2K\pi}{h}$$

Se representan por vectores cuya longitud es la unidad de longitudes, y cuyos extremos están en una circunferencia que queda dividida por ellos en *h* partes iguales.

6. Raíces de —1.

Escribe las expresiones que dan la raíz principal y la raíz general de índice *h*, del número —1.

$$\sqrt[h]{-1} = \sqrt[h]{c^{\pi}} = c^{\pi/h} \qquad \sqrt[h]{((-1))} = c^{\pi/h} \times c^{2K\pi/h} = \sqrt[h]{-1}.\sqrt[h]{((1))}$$

Se deduce de esto que la raíz principal de —1 tiene de argumento principal el cociente de dividir π por el índice de la raíz, y que todas las raíces de índice *h* de —1 se hallarán multiplicando la raíz principal, por las raíces del mismo índice de 1.

Así por ejemplo, ya sabes que la raíz cuadrada principal de —1 es la unidad imaginaria, *i*, y las dos raíces serán el producto de *i* por las raíces de 1 que son ± 1, luego será:

$$\sqrt{((-1))} = \pm i.$$

La multiplicación de un número complejo por $c^{\pi/h}$ se interpreta geométricamente por un giro de amplitud $\frac{\pi}{h}$, del vector representativo de ese número complejo; así que, las raíces de índice *h*, de —1, se podrán obtener efectuando un giro de amplitud $\frac{\pi}{h}$ a cada uno de los vectores que representan las raíces de índice *h* del número 1.

Por ejemplo, en la figura 9, los vectores OA y OC representan las raíces cuadradas de 1, y si ambos vectores efectúan un giro de amplitud: $\frac{\pi}{2}$, o sea de 90°, se obtienen los vectores OB y OD, que representan las raíces cuadradas de —1.

Los extremos de los vectores que representan las *h* raíces de índice *h*, del número —1, dividirán también o la circunferencia en *h* partes iguales, es decir serán vértices de otro polígono regular inscrito de *h* lados.

Si se consideran las *h* raíces de 1, y la *h* raíces de —1, los puntos que representan a todas, dividirán a la circunferencia en 2 h partes iguales.

Por ejemplo, las tres raíces cúbicas de 1 y las tres raíces cúbicas de —1, se representan por los vértices de un exágono regular, o bien, por vectores cuyos extremos dividen a la circunferencia en 6 partes iguales.

En resumen:

La raíz principal de índice *h*, de —1, tiene por argumento principal π/h.

Las *h* raíces de índice *h* del número —1, se obtienen multiplicando la raíz principal, por las *h* raíces del mismo índice, del número 1.

Su representación geométrica se puede dibujar efectuando un giro de amplitud π/h a cada uno de los vectores que representan las raíces de 1.

7. Raíces de los números reales.

Halla la raíz general, de índice *h*, de los números 4 y —4:

$$\sqrt[h]{(4)} = \sqrt[h]{4} \cdot c^{2K\pi/h} = \sqrt[h]{4} \times \sqrt[h]{(1)}$$

$$\sqrt[h]{(-4)} = \sqrt[h]{4} \cdot c^{\pi/h} \times c^{2K\pi/h} = \sqrt[h]{4} \times \sqrt[h]{(-1)}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{(-9)} = 3 \cdot \sqrt{(-1)} = \pm 3\,i$$

En resúmen:

Las raices de índice *h* de un número real se obtienen multiplicando la raíz aritmética del número, por las raices del mismo índice de 1 ó de —1, según que el número sea positivo o negativo.

NOTAS

1. Sobre el cociente de dos complejos.

Hemos demostrado que el cociente de dividir un complejo: $r.c^{\alpha}$, por otro complejo, no nulo, $s.c^{\beta}$, *existe siempre,* y ahora vamos a demostrar que es *único.*

En efecto, para que un número *x* sea cociente de dividir dichos complejos es necesario que el producto de *x* por el divisor, nos dé el dividendo. Llamando *t* el módulo de *x,* y llamando γ, uno de sus argumentos, se tendrá:

$$\frac{r.c^{\alpha}}{s.c^{\beta}}=t.c^{\gamma} \rightleftharpoons (t.c^{\gamma}).(sc.^{\beta})=r.c^{\alpha} \rightleftharpoons (t.s).c^{\gamma+\beta}=r.c^{\alpha} \rightleftharpoons$$

$$\begin{cases} t.s=r \\ (\gamma+\beta)-\alpha=2K\pi \end{cases} \rightleftharpoons \begin{cases} t=r/s \\ \gamma=(\alpha-\beta)+2K\pi \end{cases}$$

Por tanto, el cociente *x* será:

$$x=\frac{r}{s}.c^{(\alpha-\beta)+2K\pi}=\frac{r}{s}.c^{\alpha-\beta}$$

que es un número único, igual al que habíamos encontrado anteriormente.

2. Sobre las raices de índice *h*.

Hemos demostrado que todo número complejo no nulo, tiene, *por lo menos, h* raices de índice *h,* pero se puede demostrar que no tiene más. Para verlo supongamos que el radicando es: $z=r.c^{\alpha}$ siendo α el argumento principal.

Toda raíz *x,* de índice *h,* del número *z* verifica esta ecuación: $x^h=z$. Llamando *s* el módulo de la raíz *x,* y llamando β, uno de sus argumentos, se tendrá:

$$(s.c^{\beta})^h=r.c^{\alpha} \rightleftharpoons s^h.c^{h\beta}=r.c^{\alpha} \rightleftharpoons \begin{cases} s^h=r \\ h.\beta-\alpha=2K\pi \end{cases} \rightleftharpoons$$

$$\begin{cases} s=\sqrt[h]{r} \\ \beta=\frac{\alpha}{h}+\frac{2K\pi}{h} \end{cases}$$

y por tanto deberá ser:

$$x = \sqrt[h]{r} \cdot c^{\alpha/h + 2K\pi/h}$$

expresión que sólo tiene h valores distintos.

EJERCICIOS

1. Calcular los siguientes cocientes, expresando los datos y el resultado, en forma polar:

$$\frac{5.(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)}{2.(\cos 3\pi + i \operatorname{sen} 3\pi)} \qquad \frac{i}{\sqrt[3]{-8}}$$

2. Calcular esos mismos cocientes, expresando los datos y el resultado en forma binómica.

3. Calcular las siguientes raices:

$$\sqrt{9} \qquad \sqrt{((9))} \qquad \sqrt{-9} \qquad \sqrt{((-9))} \qquad \sqrt{((i))} \qquad \sqrt{1+i}$$

4. Resolver las siguientes ecuaciones, por extracción de raices:

$$x^3 = 27 \qquad x^3 + 27 = 0 \qquad x^4 = 1 \qquad x^4 + 1 = 0$$

TEMA 7.°

APLICACIONES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

1. Expresión polar del seno y el coseno.

Escribe en forma trigonométrica el número c^{α} y su conjugado:

$$c^{\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$$

$$c^{-\alpha} = \cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha$$

Suma y resta miembro a miembro estas dos igualdades, y despeja el coseno y el seno:

$$c^{\alpha} + c^{-\alpha} = 2\cos\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{c^{\alpha} + c^{-\alpha}}{2}$$

$$c^{\alpha} - c^{-\alpha} = 2i \operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{c^{\alpha} - c^{-\alpha}}{2i}$$

Ves que el coseno de un ángulo es igual a la semisuma de dos números imaginarios conjugados, cosa que no te debe extrañar, por-

que ya sabes que la suma de dos complejos conjugados es real (Tema 5.º-6). Y ves también que el seno de un ángulo es igual a la semidiferencia de dos números imaginarios conjugados, dividida por *i;* lo cual tampoco te debe extrañar, porque ya sabes que la diferencia de dos complejos conjugados es imaginario puro, y al dividirla por *i,* resultará real.

En resumen:

El coseno de un ángulo α *es igual a la semisuma del complejo* c^{α} *y su conjugado; y el seno de un ángulo* α *es igual a la semidiferencia del complejo* c^{α} *y su conjugado, dividida por la unidad imaginaria* i.

Para demostrarlo se expresan en forma trigonométrica esos números complejos, y se suman y restan las igualdades correspondientes.

2. Seno y coseno de los múltiplos de un ángulo.

Las fórmulas que dan el sen 2α, y el cos 2α, en función del sen α, y el cos α, pueden obtenerse aplicando la fórmula de Moivre y la fórmula de Newton a la expresión $(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)^2$; aplícalas:

$$(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)^2=\cos 2\alpha+i\,\text{sen}\,2\alpha$$

$$(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)^2=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha+2i\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$$

Siendo iguales los primeros miembros, lo serán también los segundos, y deberán tener iguales las partes reales, y los coeficientes de las partes imaginarias; expresa estas igualdades:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha$$

$$\text{sen}\,2\alpha=2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$$

Obtienes así dos fórmulas que ya conocerás por Trigonometría.

Como también sabrás, es costumbre expresar el cos 2α, sólo en función del cos α, o sólo en función del sen α; exprésalo:

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\,\text{sen}^2\alpha$$

El mismo procedimiento que hemos seguido para obtener el seno y el coseno del duplo de un ángulo, puede aplicarse a la obtención del seno y el coseno del triplo de un ángulo, o en general, del múltiplo *m*-simo de un ángulo. Para este caso general, bastará aplicar la fórmu-

la de Moivre y la fórmula de Newton a la expresión: $(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)^m$; aplícalas:

$$(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)^m=\cos m\,\alpha+i\,\text{sen}\,m\,\alpha$$

$$(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)^m=\cos^m\alpha+m\,i\cos^{m-1}\alpha\,\text{sen}\,\alpha+$$

$$+\frac{m(m-1)}{2}i^2\cos^{m-2}\alpha\,\text{sen}^2\,\alpha+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}.\,i^3\,.\cos^{m-3}\alpha\,\text{sen}^3\,\alpha+\ldots$$

En este segundo miembro puedes sustituir las potencias de *i* por sus valores, y separar las partes reales e imaginarias, como ya lo hiciste en un caso análogo, (T. 5.º-5); hazlo así, y deduce de ello el valor del coseno y el del seno de m α:

$$\cos m\,\alpha=\cos^m\alpha-\frac{m\,(m-1)}{2}\cos^{m-2}\alpha.\text{sen}^2\alpha+\ldots$$

$$\text{sen}\,m\,\alpha=m\,\cos^{m-1}\alpha.\text{sen}\,\alpha-\frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{2.3}\cos^{m-3}\alpha.\,\text{sen}^3\,\alpha+\ldots$$

En resumen:

Para hallar el seno y el coseno de los múltiplos de un ángulo se aplican las fórmulas de Moivre y de Newton que dan las potencias de $(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)$.

3. Ecuaciones de segundo grado con soluciones imaginarias.

Escribe la ecuación general de segundo grado con una incógnita, y la fórmula que da sus dos soluciones:

$$a\,x^2+b\,x+c=0 \rightleftharpoons x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}$$

Los tres coeficientes, *a, b, c,* se supone que son números reales, que se conocen en cada ecuación particular, y puede ocurrir que el radicando, $b^2-4\,a\,c$, sea mayor que 0, igual a 0, o menor que 0; es decir, positivo, nulo, o negativo.

Cuando el radicando es positivo, la ecuación tiene dos soluciones reales y desiguales; cuando el radicando es nulo la ecuación tiene dos soluciones reales e iguales, o si se quiere expresar así, tiene una solución, que se considera como doble; pero si el radicando es negativo, la ecuación carece de soluciones reales. Llamando *m* el módulo del radicando en este tercer caso, será: $b^2-4\,a\,c=-m$, y puedes hallar las soluciones de la ecuación recordando que el número $-m$ tiene dos raíces cuadradas, que se obtienen multiplicando la raíz aritmética de *m,* o sea $\sqrt{m}$, por las raíces cuadradas de -1, o sea por $\pm i$; halla dichas soluciones:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{-m}}{2\,a}=\frac{-b\pm i\,\sqrt{m}}{2\,a}=-\frac{b}{2\,a}\pm\frac{\sqrt{m}}{2\,a}\,i$$

Ves, por tanto, qne si el radicando $b^2-4\,a\,c$ es negativo, la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones *imaginarias conjugadas.*

Resuelve, por ejemplo, la ecuación que tiene sus tres coeficientes iguales a la unidad:

$$x^2+x+1=0 \longrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

En resumen:

Si en la ecuación de segundo grado $a\,x^2+b\,x+c=0$, es negativo el radicando $b^2-4\,a\,c$, la ecuación tiene dos soluciones imaginarias conjugadas.

4. Ecuaciones binomias.

Se llaman ecuaciones binomias con una incógnita *z,* las ecuaciones que pueden reducirse a una de esta forma: $z^h=a$; y se llaman binomias, porque esta ecuación reducida solo tiene dos términos. Se resuelve hallando las raices del segundo miembro; indícalo:

$$z^h=a \rightleftharpoons z=\sqrt[h]{(a)}$$

La ecuación tiene, pues, tantas soluciones como unidades tiene su grado, cosa que ocurre, según se demuestra en Algebra, con todas las ecuaciones algebráicas de una incógnita, que tienen tantas soluciones como unidades tiene el grado de la ecuación.

En el Tema anterior hemos aprendido a calcular las raices de un número cualquiera, *a,* sea real o imaginario, si bien, para el cálculo efectivo de esas raices, es necesario muchas veces recurrir a las Tablas Trigonométricas.

Pero tiene interés el resolver las ecuaciones binomias, que tienen el término independiente real, sin recurrir a dichas Tablas.

En definitiva solo hay que estudiar las ecuaciones cuyo término independiente es 1 o -1, pues las raices de un número real ya sabes que se pueden obtener multiplicando la raíz aritmética del mismo índice de su módulo, por las raices del mismo indice de 1 ó de -1, según que el número sea positivo o negativo.

Como ejemplo, vas a resolver la ecuación binomia de tercer grado de la forma: $z^3=1$.

Sigue primero el método directo, que consiste en despejar el valor de *z,* y hallar las raices:

$$z^3=1 \longrightarrow z=\sqrt[3]{(1)}=c^{2\,K\,\pi/3}=1,\ \text{ó}\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i,\ \text{ó}\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

A los mismos resultados se puede llegar algebráicamente. Para ello observarás que hay una solución que se conoce inmediatamente,

que es la solución $z=1$, por lo cual se podrá rebajar el grado de la ecuación.

Y en efecto, pasado el 1 al primer miembro, se obtiene: $z^3-1=0$, y como el polinomio z^3-1 se anula para el valor 1, será divisible por $z-1$. Haz la división, y obtendrás como cociente: z^2+z+1.

Si este cociente, lo multiplicas por el divisor, debe obtenerse el dividendo, por lo cual puedes sustituir este dividendo, que es de tercer grado, por el producto de una expresión de primer grado por otra de segundo; haz la sustitución en la ecuación:

$$z^3+1=0 \rightleftharpoons (z-1)(z^2+z+1)=0$$

Esta ecuación última se descompone en dos; escríbelas, y resuélvelas:

$$z-1=0 \longrightarrow z=1$$

$$z^2+z+1=0 \longrightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \text{ ó bien } -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Ves que has obtenido las mismas soluciones que antes.

En resumen:

Las ecuaciones binomias se resuelven hallando las raices del índice que indica el grado de la ecuación, si bien puede emplearse muchas veces método Algebráico.

5. División de la circunferencia.

En el Tema anterior has visto que la división de la circunferencia está relacionada directamente con la extracción de las raices de la unidad, puesto que los puntos que representan geométricamente las raices de índice *h*, dividen a la circunferencia en *h* partes iguales.

Utilizando las Tablas Trigonométricas, sabemos hallar las raices de cualquier índice de la unidad, y por tanto podremos dividir aproximadamente la circunferencia en cualquier número de partes iguales.

Ahora bien, si se pretende resolver el problema de la división de la circunferencia con el solo auxilio de la regla y el compás, se ha demostrado que solo puede resolverse exactamente, en ciertos casos, como por ejemplo, la división en 3, en 4, en 5, en 6, en 8, en 10, partes iguales y no se puede hacer en otros casos, como por ejemplo, en el caso de 7 partes, de 9 partes, etc.

En resúmen:

La división de la circunferencia en partes iguales se puede hacer calculando las raices de la unidad.

Con la regla y el compás no puede resolverse exactamente mas que en ciertos casos.

6. Indicaciones sobre la expresión exponencial de los complejos.

Supongamos una potencia indicada de esta forma: $a_n^{b_n}$, cuya base y cuyo exponente sean variables convergentes, de valores reales.

Ya sabrás que su límite puede hallarse generalmente sustituyendo esa base y ese exponente, por sus límites respectivos; escribe la igualdad que lo indica:

$$\text{lím } a_n^{b_n} = (\text{lím } a_n)^{\text{lím } b_n}$$

En el caso particular de que la base tenga por límite 1, y el exponente tenga por límite ∞, el segundo miembro de esa igualdad toma la forma: 1^∞, que es un símbolo de indeterminación. Ello indica que el límite hacia el cual tiende la potencia en este caso, depende de la manera como dicha base y exponente tienden a sus límites 1 e ∞.

Si la base se diferencia de 1 en el infinitésimo 1/n, y el exponente es igual al infinitamente grande n, se llega a demostrar que la potencia tiende a un número irracional, que se llama número *e*, cuyas primeras cifras son: 2,71828... Según eso, escribe la igualdad que define el número *e:*

$$e = \text{lím } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828...$$

La exponencial e^x, cuya base es el número *e*, y el exponente es una variable real, *x*, se llama *exponencial natural*, y los logaritmos de base *e* se llaman logaritmos naturales, y también se llaman *logaritmos Neperianos*, porque Neper, al inventar los logaritmos, tomó ese número *e* como base.

Consideremos esta potencia de exponente imaginario: e^i, cuya base es el número *e*, y cuyo exponente es la unidad imaginaria. Para nosotros carece todavía de significado, porque no hemos definido las potencias de exponente imaginario. Pues bien, por razones que puedes ver en las Notas, definiremos esa potencia e^i como una expresión que tiene por valor la unidad compleja **c**; es decir, que admitiremos por definición esta igualdad: $e^i = \mathbf{c}$.

Mas en general, la potencia $e^{\alpha i}$ podemos definirla sin más que suponer que los dos miembros de la igualdad anterior se elevan al exponente real α, y se aplica la conocida regla para elevar una potencia indicada a otro exponente; aplícala, y te resultará: $e^{\alpha i} = \mathbf{c}^\alpha$. El se-

gundo miembro representa un complejo de módulo 1, y uno de cuyos argumentos es α; y el primer miembro se llama expresión exponencial de ese complejo.

Todavía podemos considerar, más en general, una potencia de base *e*, y cuyo exponente es un imaginario complejo, $e^{m+\alpha i}$. Para definirla admitiremos que se aplica también la ley de exponentes; aplícala:

$$e^{m+\alpha i}=e^m.e^{\alpha i}=e^m.c^{\alpha}$$

y así ves que la debemos definir como representando un complejo de módulo e^m, y uno de cuyos argumentos sea α.

Todo número real y positivo *r*, puede ponerse en forma exponencial de base *e;* ponlo, escribiendo Lg r por logaritmo natural de *r:* $r=e^{Lg\,r}$, y por eso todo complejo de módulo *r* y uno de cuyos argumentos es α podrás expresarlo en forma exponencial; exprésalo:

$$r.c^{\alpha}=r.e^{\alpha i}=e^{Lg\,r}.e^{\alpha i}=e^{Lg\,r+\alpha i}$$

En las fórmulas del párrafo 1, que expresan el cos α y el sen α, en forma compleja, puedes sustituir c^{α} y su conjugado, por sus expresiones exponenciales, y obtienes así las famosas *fórmulas de Euler;* escríbelas:

$$\cos\alpha=\frac{e^{\alpha i}+e^{-\alpha i}}{2} \qquad \text{sen}\,\alpha=\frac{e^{\alpha i}-e^{-\alpha i}}{2i}$$

La expresión exponencial de los complejos se presta al cálculo de los logaritmos de los números complejos y a la definición y cálculo de potencias de base y exponente complejos, de lo cual puedes ver una indicación en las Notas.

En resumen:

Se llama número *e* al límite de la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, y ese número tiene por primeras cifras: 2,71828...

Las potencias de base *e* y exponente complejo las definiremos por estas fórmulas:

$$e^i=c \qquad e^{\alpha i}=c^{\alpha} \qquad e^{m+\alpha i}=e^m.c^{\alpha}=e^m(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)$$

y los primeros miembros se llaman expresiones exponenciales de los complejos a que son iguales.

Si se aplican estas fórmulas a las expresiones polares del seno y el coseno, se obtienen las llamadas fórmulas de Euler.

NOTAS

1. Sobre la expresión exponencial de los complejos.

Vamos a justificar la definición expresada por esta fórmula: $e^i = \mathbf{c}$.

El número *e* hemos dicho que se define por la igualdad:

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

partiendo de esta definición se llega a demostrar que toda expresión de esta forma $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$, en donde a_n es un infinitamente grande, tiene también por límite el mismo número *e;* y toda expresión de esta forma: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, donde x no depende de *n,* tiene por límite e^x.

Cuando se ha demostrado esto, parece natural definir la potencia e^i por la igualdad siguiente:

$$e^i = \lim \left(1+\frac{i}{n}\right)^n$$

y de esta igualdad se deducirá esta otra: $e^i = \mathbf{c}$, siempre que probemos que la expresión $\left(1+\frac{i}{n}\right)^n$, tiene por límite la unidad compleja, **c,** probando para ello que el módulo de dicha expresión tiene por límite 1, y el argumento también tiene por límite 1.

Para hallar el módulo de esa expresión, hallaremos primero el módulo de la base, y después lo elevamos al exponente, a saber:

$$\left|1+\frac{i}{n}\right| = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \qquad \left|\left(1+\frac{i}{n}\right)^n\right| = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n/2}$$

Y para hallar el límite de este módulo lo transformamos previamente, como se indica a continuación:

$$\lim \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n/2} + \lim \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{1/2n} = \left[\lim \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\lim 1/2n} = e^0 = 1$$

Queda probado así que el módulo del complejo $\left(1+\frac{i}{n}\right)^n$ tiene por límite 1; y vamos a probar que también el argumento tiene por límite 1.

Para hallar este argumento, hallaremos primero el de la base, empleando el arco tangente, y después multiplicaremos ese argumento de la base, por el exponente; a saber:

$$\arg \left(1+\frac{i}{n}\right) = \text{arc tg} \frac{1/n}{1} = \text{arc tg} \frac{1}{n} \qquad \arg \left(1+\frac{i}{n}\right)^n = n.\text{arc tg} \frac{1}{n}$$

Para hallar el límite de esta expresión observaremos que todo arco que no llega a 90° es menor que su tangente, y mayor que su

seno; por lo cual, recordando la fórmula que dá el seno en función de la tangente, se tendrá:

$$\frac{1}{n} > \text{arc tg}\frac{1}{n} > \frac{1/n}{\sqrt{1+1/n^2}} \quad \text{ó sea:} \quad 1 > n.\text{arc tg}\frac{1}{n} > \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}}$$

Si hacemos crecer *n* ilimitadamente, el tercer término tiende al número 1, y como el primero es siempre 1, también el segundo tendrá por límite 1, es decir:

$$\lim\left[\arg\left(1+\frac{i}{n}\right)^n\right]=\lim\left(n.\text{arc tg}\frac{1}{n}\right)=1$$

que es lo que deseábamos demostrar.

2. Sobre los logaritmos de los números complejos.

Si z es un número complejo, la expresión: $\log_b z$, se lee: *logaritmo principal, en base b, del número z;* y representa un exponente al cual se puede elevar la base *b,* para obtener el número z, exponente que se calcula expresando z en forma exponencial, tomando por argumento *el principal,* y aplicando a la expresión las reglas generales de la logaritmación. Por tanto, llamando r el módulo de z, y llamando α su argumento principal, su logaritmo principal, en base *b,* será:

$$\log_b z=\log_b\left(r.e^{\alpha i}\right)=\log_b r+\alpha i\log_b e$$

Como ejemplo, halla los logaritmos principales, en base e, del número —2, y del número i, sustituyendo la expresión $\log_e$ por ésta: Lg:

$$\text{Lg}(-2)=\text{Lg}(2.e^{\pi i})=\text{Lg}\,2+\pi i \qquad \text{Lg}\,i=\text{Lg}\,e^{i\pi/2}=\frac{\pi}{2}i$$

La expresión: $\log_b((z))$ se lee: *logaritmo general, en base b, del número z;* representa todos los exponentes a los cuales se puede elevar la base *b,* para obtener el número z, y tal expresión se calcula poniendo z en forma exponencial tomando por argumento *el general,* y aplicando las reglas generales de la potenciación.

Con la misma notación anterior, halla la fórmula del logaritmo general, en base *b*, del número z:

$$\log_b((z))=\log_b\left[r.e^{(\alpha+2K\pi)i}\right]=\log_b r+(\alpha+2K\pi)i.\log_b e$$

En particular, se tendrá:

$$\text{Lg}((-2))=\text{Lg}((2.e^{(\pi+2K\pi)i}))=\text{Lg}\,2+(\pi+2K\pi)i$$

$$\text{Lg}((i))=\text{Lg}((e^{i(\pi/2+2K\pi)}))=\left(\frac{\pi}{2}+2K\pi\right)i$$

3. Sobre las potencias de exponente complejo.

Si z es un número complejo, y x es otro complejo, la expresión: z^x, se llama *potencia principal* de base z y de exponente x; por definición, su valor se halla expresando la base en forma exponencial, de modo que se tome como argumento *el principal;* expresando el exponente en forma binómica, y aplicando las reglas generales de la potenciación, que se demostraron por los números reales.

Supongamos que al exponente principal de z le llamamos α, que a su módulo le llamamos r, y supongamos que a las componentes de x las llamamos m y n; se tendrá entonces:

$$z^x = (e^{Lg\, r + \alpha i})^{m+n i} = e^{m.Lg\, r - n.\alpha + (n.Lg\, r + m\alpha) i}$$

Ejemplos:

$$(-2)^i = (e^{Lg\, 2 + \pi i})^i = e^{i\, Lg\, 2 - \pi} = e^{-\pi} \times e^{i\, Lg\, 2}$$

$$i^i = (e^{i\, \pi/2})^i = e^{-\pi/2}$$

La expresión $((z))^x$ se lee *potencia general de base z, y de exponente x:* por definición, se halla en la misma forma que la potencia principal, pero tomando el argumento *general de z.* La potencia general de un número complejo puede tener infinitos valores, como ya lo vimos para el exponente real. Con la notación de antes se tendrá:

$$((z))^x = ((e^{Lg\, r + (\alpha + 2\, K\, \pi) i}))^{m+n i} =$$

$$= e^{m.Lg\, r - n.(\alpha + 2\, K\, \pi) + [n.Lg\, r + m(\alpha + 2\, K\, \pi)]\, i}$$

Ejemplos:

$$((-2))^i = ((e^{Lg\, 2 + (\pi + 2\, K\, \pi) i}))^i = e^{i\, Lg\, 2 - (\pi + 2\, K\, \pi)}$$

$$((i))^i = ((e^{(\pi/2 + 2\, K\, \pi) i}))^i = e^{-(\pi/2 + 2\, K\, \pi)}$$

EJERCICIOS

1. Expresar el coseno y el seno de 30°, en función de dos complejos conjugados; comprobar las fórmulas, sustituyendo estos complejos por sus expresiones trigonométricas, y aplicar al mismo ángulo de 30° las fórmulas de Euler.

2. Resolver la ecuación $x^2 - 2x + 2$, y expresar las soluciones en forma binómica, en forma polar, en forma trigonométrica y en forma exponencial.

3. Resolver por Trigonometría y por Algebra las ecuaciones:

$$x^4 - 1 = 0 \qquad x^4 + 1 = 0$$

4. Expresar el $\cos 3\alpha$ y el $\operatorname{sen} 3\alpha$ en función del $\operatorname{sen} \alpha$ y el $\cos \alpha$.

ÍNDICE

Páginas

Prólogo 3

Tema 1.°

Concepto de número complejo 11

Tema 2.°

Representación geométrica de los números complejos 19

Tema 3.°

Primeras operaciones con complejos 30

Tema 4.°

Potenciación natural de complejos 39

Tema 5.°

Potencias de exponente real de los números complejos 47

Tema 6.°

División y radicación de complejos 54

Tema 7.°

Aplicaciones de los números complejos 62

ES PROPIEDAD DEL AUTOR

ESTUDIOS DEL BACHILLERATO

PROGRAMA

DE

MATEMÁTICAS

6.º CURSO

JOSÉ OÑATE GUILLÉN

SAN SEBASTIAN 1938-39

ESTUDIOS DEL BACHILLERATO

PROGRAMA

DE

MATEMÁTICAS

6.º CURSO

JOSÉ OÑATE GUILLÉN

SAN SEBASTIAN 1938-39

LOS NÚMEROS REALES

Tema 1.° - Números naturales

1. Relaciones de equivalencia. - 2. Coordinación de conjuntos finitos. - 3. Números naturales. - 4. Igualdad de números naturales. - 5. Representación geométrica de los números naturales. - 6. Adición de números naturales. - 7. Leyes formales de la adición. - 8 Leyes de monotonia de la adición. - 9. Sustracción de números naturales.

Tema 2.° - Números enteros

1. Equivalencia de diferencias indicadas. - 2. Transformación de una diferencia en otra equivalente. - 3. Concepto de número entero. - 4. Representación geométrica de los números enteros. - 5. Adición de números enteros. - 6. Leyes formales de la suma de enteros. - 7. Leyes de monotonía de la suma de enteros. - 8. Sustracción de enteros. - 9. Multiplicación de enteros. - 10. Regla de los signos de la multiplicación. - 11. Leyes formales de la multiplicación de enteros. - 12. Leyes de monotonía de la multiplicación de enteros - 13. Definición general de dividir.

Tema 3.° - Números racionales

1. Equivalencia de cocientes indicados. - 2. El concepto de número racional. - 3. Representación geométrica de los números racionales. - 4. Adición de números racionales. - 5. Leyes formales de la suma de números racionales. - 6. Multiplicación de números racionales. - 7. Leyes formales de la multiplicación de números racionales. - 8. División de números racionales.

Tema 4.° - Necesidad de definir nuevos números

1. Potencias de exponente entero. - 2. Leyes formales de la potenciación. - 3. Leyes de monotonía de la potenciación. - 4. Radicación. - 5. Imposibilidad de la radicación aritmética. - 6. Imposibilidad de la operación de medir. - 7. Fracciones decimales.

Tema 5.° - Límites racionales

1. Sucesiones indefinidas y variables aritméticas. - 2. Variables infinitamente grandes e infinitamente pequeñas. - 3. Propiedades de los infinitésimos. - 4. Límite de una variable aritmética. - 5. Primeras propiedades de los límites.

Tema 6.° - Concepto de número real

1 Variables convergentes, divergentes y oscilantes. - 2. Límites de las variables convergentes. - 3. Equivalencia de límites indicados. - 4. Definición de número real. - 5. Clasificación de los números reales.

Tema 7.° - Representaciones de los números reales

1. Variables monótonas. - 2. Variables contiguas. - 3. Expresión decimal de los números reales. - 4. Representación geométrica de los números reales. - 5. Postulado de continuidad.

Tema 8.° - Suma y resta de números reales

1. Concepto de suma de números reales. - 2. Leyes formales de la suma de números reales. - 3. Leyes de

monotonía de la suma de números reales. - 4. Regla práctica para sumar números reales. - 5. Sustracción de números reales. - 6. Reglas prácticas para restar números reales.

Tema 9.° - Multiplicación y división de números reales

1. Definición del producto de números reales. - 2. Leyes formales del producto de números reales. - 3. Reglas prácticas para multiplicar números reales. - 4. División de números reales. - 5. Reglas prácticas para dividir números reales.

Tema 10. - Potencias y raíces naturales

1, Potenciación natural de los números reales. - 2. Radicación natural de los números reales. - 3. Regla práctica para calcular raíces de números reales.

Tema 11. - Potencias de exponente racional

1. Cálculo con radicales de radicando real. - 2. Potencias de exponente racional. - 3. Propiedades de las potencias de exponente racional. - 4. Leyes de monotonía de las potencias de exponente racional.

Tema 12. - Sucesiones de números reales

1. Variables de valores reales. - 2. Límites de las variables convergentes de valores reales. - 3. Límites de operaciones indicadas. - 4. Expresiones que toman valor infinito o indeterminado. - 5. Límites de expresiones racionales.

Tema 13. - Funciones exponencial y logarítmica

1. Potencias de exponente real. - 2. Leyes formales de las potencias de exponente real. - 3. Función exponencial. - 4. Logaritmos. - 5 Función logaritmica. 6. Límites de potencias, raíces y logaritmos.

Tema 14. - Cálculo por logaritmos

1. Cálculo logarítmico. - 2. Logaritmos decimales. - 3. Tablas de logaritmos. - 4. Cálculo por logaritmos. - 5. Idea de la regla de cálculo.

Tema 15. - Progresiones aritméticas y geométricas

1. Progresiones aritméticas. - 2. Progresiones geométricas. - 3. Propiedades de las progresiones, - 4. Suma de los términos de una progresión geométrica. - 5. Suma de una progresión geométrica de infinitos términos. - 6. Aplicación a los decimales periódicos.

Tema 16. - Interés compuesto y anualidades

1, Interés compuesto. - 2. Anualidades de capitalización. - 3, Anualidades de amortización.

TRIGONOMETRÍA

Tema 1.° - Funciones circulares

1. Los arcos y los ángulos como magnitudes relativas. 2. Medida de amplitudes relativas. - 3. Las funciones circulares. - 4. Arcos con el mismo origen y el mismo extremo. - 5. Razones trigonométricas de arcos opuestos. - 6. Arcos suplementarios. - 7. Arcos complementarios.

Tema 2.° - Variación de las funciones circulares

1. Variación del seno. - 2. Variación del coseno. - 3. Variación de la tangente. - 4. Variación de otras funciones trigonométricas. - 5. Funciones periódicas.

Tema 3.° - Tablas trigonométricas

1. Tablas trigonométricas naturales. - 2. Tablas logarítmico-trigonométricas.

Tema 4.° - Ecuaciones trigonométricas

1. Ecuación: sen. x=m. - 2. Ecuación: cos. x=m. 3. Ecuación: tg. x=m. - 4. Relación entre el seno y el coseno de un ángulo. - 5. Cálculo de las razones trigonométricas, si se conoce una de ellas. - 6 Ecuaciones trigonométricas en general.

Tema 5.° - Resolución de triángulos rectángulos

1. Relaciones en el triángulo rectángulo. - 2. Resolución de triángulos rectángulos en diversos casos.

Tema 6.° - Adición y sustracción de ángulos

1. Ejes y vectores. - 2. Proyección de un vector sobre un eje, y proyección de una quebrada sobre un eje. - 3. Seno y coseno de la suma de dos ángulos. - 4. Seno y coseno de la diferencia de dos ángulos. - 5. Tangente de la suma y diferencia de dos ángulos.

Tema 7.° - Duplicación de ángulos

1. Razones trigonométricas del duplo de un ángulo. - 2. Razones trigonométricas del ángulo mitad de otro. - 3. Transformación de sumas en productos.

Tema 8.° - Relaciones en los triángulos oblicuángulos

1. Relaciones entre los lados y los ángulos opuestos. - 2. Proyección de dos lados sobre el tercero. - 3. Cuadrado de un lado de un triángulo. - 4. Area de un triángulo. - 5. Radios de las circunferencias circunscrita e inscrita. - 6. Expresión del área en función de los tres lados.

Tema 9.° - Resolución de triángulos oblicuángulos

1. Caso de un lado y dos ángulos. - 2. Caso de dos lados y el ángulo comprendido. - 3. Caso de los tres lados. - 4. Caso de dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Tema 10. - Aplicaciones de la Trigonometría

1. Aplicaciones geométricas. - 2. Aplicaciones al cálculo de distancias. - 3. Aplicaciones al cálculo de alturas.

LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Tema 1.° - Concepto de número complejo

1. Necesidad de ampliar de nuevo el campo numérico. - 2. Expresiones complejas. - 3. Equivalencia de expresiones complejas. - 4. Concepto de número complejo. - 5. Módulo y exponentes de un número complejo. - 6. Clasificación de los números complejos. - 7. Unidad imaginaria.

Tema 2.° - Representación geométrica de los números complejos

1. Representación de los números reales. - 2. Representación de los números complejos. - 3. Argumentos de un número complejo. - 4. Unidad compleja. - 5. Expresión polar de un número complejo. - 6. Componentes de un número complejo. - 7. Cálculo del módulo y los argumentos en función de las componentes. - 8. Condición de equivalencia de dos expresiones polares.

Tema 3.° - Primeras operaciones con complejos

1. Suma de complejos. - 2. Propiedades de la suma de complejos. - 3. Resta de números complejos. - 4. Multiplicación de complejos. - 5. Método gráfico de multiplicación de complejos. - 6. Primeras leyes formales del producto de complejos.

Tema 4.° - Potenciación natural de complejos

1. Potenciación de complejos expresados en forma polar. - 2. Potencias de la unidad imaginaria. - 3. Pro-

ducto de un número real por un número complejo. - 4. Números imaginarios puros. - 5. Expresión binómica de un número complejo. - 6. Expresión trigonométrica de un número complejo. - 7. Producto de complejos en forma binómica. - 8. La propiedad distributiva en el campo complejo. - 9. Fórmula de Moivre.

Tema 5.° - Potencias de exponente real de los números complejos

1. Potencia principal de un número complejo. - 2. Potencia general de un número complejo. - 3. Caso de exponente fraccionario. - 4. Caso de exponente irracional. 5. Potencias naturales de complejos en forma binomia. 6. Complejos conjugados.

Tema 6.° - División y radicación de complejos

1. División de complejos en forma polar. - 2. División de complejos en forma binomia. - 3. Raíces cuadradas de un número complejo. - 4. Raíces de índice h de un número complejo. - 5. Raíces de la unidad. - 6. Raíces de -1. - 7. Raíces de los números reales.

Tema 7.° - Aplicaciones de los números complejos

1. Expresión polar del seno y el coseno. - 2. Seno y coseno de los múltiplos de un ángulo. - 3. Ecuaciones de segundo grado con soluciones imaginarias. - 4. Ecuaciones binomias. - 5. División de la circunferencia. - 6. Indicaciones sobre la expresión exponencial de los complejos.

Tabla de las razones trigonométricas de 0° a 90°

Ang.	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente		Ang	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente	
0°	0.0000	1,0000	0,0000	∞	90°	23°	0,3907	0.9205	0,4245	2,3559	67°
1	0,0175	0,9998	0,0175	57,2900	89	24	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	66
2	0,0349	0,9994	0,0349	28,6363	88	25	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	65
3	0,0525	0,9986	0,0524	19,0811	87	26	0,4384	0,8988	0,4877	2,0583	64
4	0,0698	0,9976	0.0699	14,3007	86	27	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	63
5	0,0872	0,9962	0,0875	11,4301	85	28	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	62
6	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	84	29	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	61
7	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	83	30	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	60
8	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	82	31	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	59
9	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	81	32	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	58
10	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	80	33	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	57
11	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	79	34	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	56
12	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	78	35	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	55
13	0,2250	0,9744	0 2309	4,3315	77	36	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	54
14	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	76	37	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	53
15	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	75	38	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	52
16	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	74	39	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	51
17	0,2924	0 9563	0,3057	3,2709	73	40	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50
18	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	72	41	0,6561	0,7547	0,8693	1.1504	49
19	0.3256	0.9455	0,3443	2,9042	71	42	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	48
20	0,3420	0.9397	0,3640	2,7475	70	43	0,6820	0.7314	0,9325	1.0724	47
21	0.3584	0,9336	0,3839	2.6051	69	44	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	46
22°	0,3746	0 9272	0 4040	2,4751	68°	45°	0.7071	0,7071	1,0000	1,0000	45°
	Coseno	Seno	Cotangente	Tangente	Ang		Coseno	Seno	Cotangente	Tangente	Ang.

Obras del mismo autor

Matemáticas (primer curso) — Pesetas

Libro I.—Nociones de Aritmética (primera parte) 3
» II.— » de Geometría » 2,50

Matemáticas (segundo curso)

Libro I.—Nociones de Aritmética (primera parte) 3
» II.— » de Geometría (segunda parte)

Matemáticas (tercer curso)

Libro I.—Aritmética racional (primera parte) . . 4
» II.—Geometría plana (primera parte) . . . 3

Matemáticas (cuarto curso)

Libro I.—Aritmética racional (segunda parte) . . 4
» II.—Geometría plana (segunda parte) . . . 3

Matemáticas (quinto curso)

Libro I.—Nociones de Algebra 4
» II.—Geometría del espacio . . . . . .

Matemáticas (sexto curso)

Libro I. Los números reales 4
» II.—Trigonometría y números complejos. . 5

Matemáticas (séptimo curso)

(En preparación)

▲ ▲ ▲

Este libro ha sido aprobado, por el plazo máximo, para que pueda servir de texto en los Centros de Segunda enseñanza

▼ ▼ ▼

Precio: 5 ptas.